Educación matemática y dialéctica. Bases para una investigación científica

Walter O. Beyer K.
Maestría en Educación, mención Enseñanza de la Matemática (IPC-UPEL)

RESUMEN

Este artículo está centrado en la realización de una profunda crítica a buena parte de las investigaciones en el área de las ciencias humanas, particularmente dentro del campo de la educación matemática, las cuales pecan de un exacerbado subjetivismo amparándose en un errado enfoque socio-cultural y, además, presentando una marcada superficialidad, como consecuencia de un relativismo cultural a ultranza y de un apego al anarquismo epistemológico y a la adopción de ciertas propuestas postmodernas. Como alternativa, proponemos tomar como método el análisis dialéctico y, sobre la base de éste, se muestra aquí diversos constructos teóricos, los cuales podrían servir de fundamento para emprender investigaciones -profundas, bien fundamentadas, con resultados constatables, intersubjetivas- sobre temas importantes dentro del campo de la educación matemática.

Palabras clave: investigación en educación matemática, educación matemática y dialéctica, enfoque sociocultural.

ABSTRACT

This article is focused on a deep critic of a large amount of the researches in the human sciences area, particularly in the mathematics education field, which have an exacerbate subjectivism supported in a wrong cultural-social approach and, besides, with a remarked superficiality, as a consequence of a radical cultural relativism and an inclination to the epistemological anarchism and to some postmodern proposals assumption. As an alternative, our proposal is to choose the method of the dialectic analysis and, over this base, we show different theoretical constructions which could be used as a groundwork to start deep and well founded researches over important themes in the mathematics education field.

Keywords: research in math education, math education and dialectics, cultural-social approach.

1. Introducción

En los tiempos actuales, se han puesto de moda una serie de concepciones educativas de corte relativista, las cuales están ancladas, supuestamente, en las tendencias de corte socio-cultural. Pareciera, y muchos lo señalan así, que asociarse a ellas es un indicativo de progresismo y de radicalización política. Sin embargo, como demostraremos en el presente artículo, no siempre la afiliación a estas concepciones es un acto de avanzada. Ellas pueden esconder una trampa ideológica y encerrar incluso las ideas más reaccionarias.

Muchas concepciones actuales del pensamiento pedagógico se amparan en la nefasta frase de Feyerabend: "todo vale". Decía éste que "hay solamente *un* principio que puede ser defendido bajo cualquier circunstancia y en *todas las etapas* del desarrollo humano. Me refiero al principio *todo vale*" (Feyerabend, 1984: 24).

Nosotros, por el contrario, abogamos claramente por *el método* y afirmamos rotundamente que *no todo vale*. Afirmamos, sin lugar a dudas, que ni la especulación ni la opinión pueden ser sinónimos de conocimiento científico. Los peligros que encierra la adopción acrítica de tales ideas son enormes, implican realmente un retroceso en el conocimiento más que un avance en el campo pedagógico.

Muchos creen que adoptando en buena parte el lenguaje y las categorías del postmodernismo, nos curamos de las tendencias positivistas. Sin embargo, la enorme carga de subjetividad que encierra buena parte de las supuestas investigaciones realizadas por el "nuevo" "paradigma" (nótese que ponemos cada término entre comillas por separado), no conducen en realidad a ninguna parte, o más bien son un camino de franco retroceso.

Además, existen y existían antes del postmodernismo, tendencias de pensamiento alternativas al positivismo, como es el caso del pensamiento marxista que, sin caer en el subjetivismo, aborda el estudio de los fenómenos desde lo social y emplea como método *la poderosa herramienta de la dialéctica*.

Adicionalmente, habría que señalar también que es un absurdo afirmar o descartar totalmente el uso de elementos de la metodología positivista, por cuanto ésta, en ciertas circunstancias, podría ser útil. Afirmar lo contrario sería muestra de profundo sectarismo y dogmatismo.

Por fortuna, muchos pensadores actuales no siguen este camino equivocado y nos presentan vías de acción alternativas, que nos evitan el quedarnos entrampados en el dualismo positivismo/postmodernismo. Uno de ellos, de indudable pensamiento progresista, es Ezequiel Ander-Egg. Señalaba él, muy acertadamente, refiriéndose a la interdisciplinariedad aunque aplicable a otros rubros, lo siguiente:

> Cuando un término, concepto o tema se pone de moda, y en algunos ambientes hasta queda bien utilizarlo, su uso indiscriminado termina por vaciarlo de un contenido preciso y bien delimitado. Esto ocurre con el concepto de interdisciplinariedad; basta leer lo que se escribe bajo este rótulo, para encontrarnos en un mundo de significados y alcances muy diversos. Esto nos enfrenta a un problema semántico. Pero, además del uso indiscriminado del término, puede darse otro hecho o circunstancia: el concepto de moda queda reducido a un *slogan* o a un comodín verbal, que se aplica a cuestiones conexas o similares a lo que el término designa en sentido estricto. (1994: 17)

Buena prueba de esto es el trabajo realizado por los conocidos físicos Sokal y Bricmont, quienes señalan:

> Mostramos que famosos intelectuales como Lacan, Kristeva, Irigaray, Baudrillard y Deleuze han hecho reiteradamente un empleo abusivo de diversos conceptos y términos científicos, bien utilizando ideas científicas sacadas por completo de contexto, sin justificar en lo más mínimo ese procedimiento -quede claro que no estamos en contra de extrapolar conceptos de un campo del saber a otro, sino sólo contra las extrapolaciones no basadas en argumento alguno-, bien lanzando al rostro de sus lectores no científicos montones de términos propios de la jerga científica, sin preocuparse para nada de si resultan pertinentes, ni siquiera de si tienen sentido. (1999: 14)

Pero más allá de lo semántico, lo cual ya es suficientemente preocupante, tras el mal uso y/o abuso terminológico se esconden en buena medida la ignorancia y las tendencias reaccionarias vestidas de progresismo.

Además, como bien lo señalan Sokal y Bricmont (1999: 15), ellos formulan una "crítica del relativismo epistemológico y de las erróneas concepciones sobre la «ciencia posmoderna»" Expresan también que se ocupan de la "mistificación, del lenguaje deliberadamente oscuro, la confusión de ideas y el mal uso de conceptos científicos" (Ibíd.). Es justamente en esta dirección, pero dentro del campo pedagógico, que queremos movernos en este trabajo.

Es de interés para el tema que nos ocupa reseñar, por ejemplo, el frecuente símil que pretende establecerse entre la investigación en ciencias sociales y la mecánica cuántica, principalmente con el Principio de Incertidumbre de Heisenberg.

Como una muestra de lo antes afirmado, consideremos lo expresado por un autor bastante citado, Martínez Miguélez, quien afirma:

> Por esto, el mismo Heisenberg (1958a) dice que "*la realidad objetiva se ha evaporado*" y que "lo que nosotros observamos no es la naturaleza en sí, sino la naturaleza expuesta a nuestro método de interrogación" (1958b, pág. 58). Estos principios se aplican a partículas y acontecimientos microscópicos; pero estos acontecimientos tan pequeños no son, en modo alguno, insignificantes.

> Son precisamente el tipo de acontecimientos que se producen en los nervios y en el cerebro, como también en los genes, y, en general, son la base que constituye toda materia del cosmos y todo tipo de movimiento y forma de energía. Si todo esto es cierto para la más objetivable de las ciencias, la física, con mayor razón lo será para las ciencias humanas, que llevan en sus entrañas la necesidad de una continua autorreferencia, y donde el hombre es sujeto y objeto de su investigación. El observador no sólo no está aislado del fenómeno que estudia, sino que *forma parte de él*. El fenómeno lo afecta, y él, a su vez, influencia al fenómeno. (2003: 4)

Aquí podría hacerse dos grandes observaciones. En primer lugar, este principio de la física no tiene nada que ver con la investigación en ciencias sociales, salvo el hecho de los humanos estamos conformados por átomos a los cuales les es aplicable la mecánica cuántica. En segundo lugar, la pretendida crítica formulada a la ciencia de base positivista en que ésta seguía servilmente la metodología de la física y, por ende, el necesario establecimiento de un nuevo paradigma queda desvirtuado, por cuanto hay un retorno a seguir un modelo físico.

Todo este galimatías que se ha ido agregando al discurso de la educación y la pedagogía ha producido, en la práctica, el desarrollo de un gran manto de subjetividad que recubre el campo. Adicionalmente, algunos optan por la incorporación, supuestamente para darle un cariz progresista a sus planteamientos, de una verborrea de tipo pretendidamente político, pero que en la práctica no pasa de ser un nominalismo ramplón ajeno a toda capacidad liberadora y transformadora del hombre y de su sociedad.

Padrón Guillén, muy acertada y argumentativamente, expresa opiniones similares a las antes esbozadas. Éste universitario venezolano critica de manera precisa y contundente la concepción de ciencia asumida por buena parte de los que pretenden seguir el "paradigma emergente", considerándola como "cualquier cosa", sometida a un "libertinaje intelectual", teñida de anarquía, subjetivismo y relativismo, adornada por una enorme capa de palabreo banal, signada por el uso de términos carentes de definición alguna, llena de ambigüedades que, lejos de alejarnos de la dominación y del atraso secular de nuestros pueblos -afirma él sin ambages-, constituye "el más reciente e inteligente artificio de las clases dominantes para confundir y subyugar" (1997: 22).

Podríamos, pues, decir con Morín que se ha instaurado una especie de:

> opinionitis u opiniomanía: decir ser o conocer algo y creer ciega y obstinadamente en ello, hasta que se produzca la metamorfosis, sin choque ni violencia, es decir, hasta que la ficción y lo imaginario se vuelvan realidad, hasta que el error y la falsedad se vuelvan verdad . [...] De este modo, lo más importante de todo es el relativismo caprichoso de las opiniones comprometidas. (1975: 20-21)

Concordamos plenamente con Sokal y Bricmont, cuando aclaran que su libro "no va contra el radicalismo político, sino contra la confusión intelectual. Nuestro objetivo no es criticar a la izquierda, sino ayudarla a defenderse de un sector de ella misma que se deja arrastrar por la moda" (1999: 17).

Una vez realizada esta fuerte crítica a buena parte del movimiento pedagógico actual, por supuesto, es necesario presentar algunos elementos de otra índole que sirvan de marco de referencia para el análisis de ciertas problemáticas educativas. Nuestro interés particular se centrará en la problemática asociada con la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas.

Hablar de la educación matemática como de un amplio proceso de difusión y de estudio del saber matemático dentro una sociedad, y también como de un campo del saber que a su vez estudia y analiza la educación matemática, obliga a la reflexión acerca del propio conocimiento matemático. Significa también abordar el proceso de génesis de dicho saber, así como su escolarización. En consecuencia, hay que ubicar en un marco más objetivo los procesos de transposición didáctica y de construcción del currículo escolar, con una adecuada definición de los términos y mediante una precisa caracterización de los procesos allí involucrados y, así, poder interpretarlos dentro de una formación socio-histórica particular.

La tarea propuesta en las líneas anteriores, evidentemente, no es fácil y se enfrenta a numerosos escollos de orden teórico-metodológico.

Adicionalmente, debemos aclarar que en este escrito no eludimos, para nada y en momento alguno, la presencia de la contradicción, ya que, como decía Mao Tse-Tung (1967: 41), "negar la contradicción de las cosas es negarlo todo".

En este sentido, por ejemplo, enfrentamos y resolvemos, por la vía del análisis crítico, la contradicción o disyuntiva presente entre seguir la visión eurocéntrica del desarrollo de las matemáticas o acogerse a un relativismo cultural extremo al estilo del planteado por Spengler (1976).

A los efectos de todo lo antes señalado, elementos clave en el planteamiento que se formula en este artículo lo constituyen conceptos como el de cultura, conocimiento matemático, *Weltanschauung* (o cosmovisión) del educador, modelo pedagógico, currículo, transposición didáctica. Muchos de los puntos antes citados han sido analizados en secciones específicas de este trabajo. Sin embargo, algunos de ellos son líneas directrices que recorren gran parte de la exposición y vertebran la discusión.

Hemos considerado un buen número de fuentes de diversa procedencia y de épocas distintas. Las ideas de diferentes autores han sido exploradas, analizadas, contrastadas y, en ocasiones, intentamos hacer una nueva síntesis a partir de ellas. Algunos elementos fueron tomados de otras áreas disciplinares. Así, por ejemplo, debemos señalar que la noción de *Weltanschauung* es un préstamo del campo de la filosofía, aunque dicho término también fue empleado por Sigmund Freud en algunos de sus escritos. La base metodológica está centrada en el empleo del método dialéctico.

Un objetivo fundamental que este trabajo persigue es la realización de un análisis crítico de muchas de las tendencias y propuestas de investigación actuales, las cuales, apoyadas en supuestos socio-críticos, se revisten de un halo de falso progresismo y, cubiertas de un grueso manto de subjetividad, pretenden explicar aspectos complejos del ser humano como la adquisición y transmisión del conocimiento dentro de un ámbito social determinado.

Otro de nuestros objetivos relevantes es la propuesta de un marco teórico-metodológico alternativo que, partiendo de lo socio-cultural pero evitando a toda costa los subjetivismos estériles, pueda servir de base para sustentar nuevas investigaciones -profundas, bien fundamentadas, con resultados constatables, intersubjetivas- sobre temas importantes de las ciencias humanas, especialmente dentro del campo de la educación matemática.

Realizamos en primer lugar una discusión crítica de cada uno de los elementos fundamentales que sustentan el trabajo, para luego emplearlos integralmente como herramientas de análisis de algunos aspectos críticos del tema que nos ocupa.

2. Matemáticas y cultura: una mirada crítica

Ante la visión a-cultural, tradicional y eurocéntrica de la evolución de las matemáticas que ha predominado durante mucho tiempo, actualmente se han puesto muy en boga las visiones socio-culturales de este campo del saber. No obstante, ni ellas son nuevas ni tampoco necesariamente son progresistas.

Comenzaremos diciendo que la historia tradicional de la matemática asume que el desarrollo de esta disciplina se inicia en la antigüedad griega, avanzando en el tiempo de manera lineal y acumulativa hasta nuestros días. Es una historia centrada en los grandes hombres y que presenta la evolución de esta área del conocimiento, aunque suene paradójico, de una manera a-histórica, partiendo de la cultura griega clásica. Además, su centro de acción se localiza fundamentalmente en Europa. Adicionalmente, dentro de esta concepción se desconoce y se desecha las circunstancias de tiempo y de lugar dentro de las cuales surge el conocimiento matemático.

Como dicha visión del "desarrollo histórico" -fundamentalmente eurocéntrico- de la matemática incluso desconoce el contexto histórico-social en el que se desarrolló la matemática que tratan de historiar dentro del mundo europeo, daría la impresión que esta disciplina, tanto en su génesis como en su evolución, es absolutamente independiente del ámbito cultural dentro del cual se ha generado.

Ante estas visiones parciales e incompletas, numerosos estudiosos (Joseph, 1996; Bishop, 1999) se han opuesto, planteando enfoques alternativos del desarrollo de este campo del conocimiento. Sin embargo, asomar la idea de que las matemáticas son un hecho cultural no es algo nuevo y, en este sentido, son muy claras y precisas las consideraciones que al respecto manifiesta el matemático francés Chapelon:

> No se puede emitir un juicio válido sobre el desarrollo de las matemáticas aislando arbitrariamente este desarrollo de su contexto, de su medio ambiente. Pues el proceso de este desarrollo es demasiado complejo y está demasiado ligado al devenir general de la humanidad para que, al aislarlo, no se lo mutile profundamente hasta el punto de llegar a ser ininteligible. No se puede hacer abstracción del carácter humano y social de las matemáticas, pues los matemáticos y las sociedades en las cuales éstos evolucionan forman un todo inseparable. Por el contrario, es reintegrando la evolución de las matemáticas al desarrollo social que es posible comprender cómo, nacidas de las necesidades técnicas de la sociedad, han adquirido poco a poco una amplitud prodigiosa y una preeminencia soberana, y cómo, en fin, en la sociedad actual, por uno de esos retornos tan frecuentes en la historia, se han convertido en uno de los cimientos ideológicos fundamentales de nuestra civilización. Necesitamos, por tanto, recurrir a la historia para aclarar las interacciones entre el desarrollo de las matemáticas y el desarrollo social. (1948: 546)

Es muy aleccionador el carácter dialéctico de esta concepción acerca de la evolución de la matemática. Pero, aún antes[1] que Chapelon, expresaba Spengler que:

> ... no hay una matemática; hay muchas matemáticas. Lo que llamamos historia de la matemática, supuesta realización progresiva de un ideal único e inmutable, es en realidad, si damos de lado la engañosa imagen de la historia superficial, una pluralidad de procesos cerrados en sí, independientes, un nacimiento repetido de distintos y nuevos mundos de la forma, que son incorporados, luego transfigurados y, por último, analizados hasta sus elementos finales. (1976: 254-255)

Debemos aclarar, además, que la aproximación que hace Spengler a la matemática está muy centrada en la idea de número y ésta la asocia con “medir, contar, dibujar, pesar, ordenar, dividir” (1976: 251). Este autor agrega que:

> ... la matemática antigua, teoría de magnitudes intuitivas, no quiere interpretar sino los hechos del presente palpable; por lo tanto, limita su investigación y su vigencia a ejemplos próximos y pequeños. En esto, la matemática antigua es perfectamente consecuente consigo misma. (1976: 261)

1 La obra cumbre de Oswald Spengler, La Decadencia de Occidente, fue terminada en 1917 y publicada en 1918.

Surgen entonces, de manera natural, las siguientes interrogantes:

> ¿Existe un sólo cuerpo de conocimientos que se llama matemática?, o ¿son varios los cuerpos de conocimiento que llevan tal denominación, como señala Spengler? A su vez, ¿qué significa la diversidad cultural para las matemáticas?

Spengler opina que "el estilo de una matemática naciente depende, pues, de la cultura en que arraiga, de los hombres que la construyen" (: 253) Hasta aquí podemos acompañar esa reflexión, al situar la matemática dentro de la cultura y moldeada por ésta; pero también llega a afirmar que "no hay ni puede haber *número* en sí. Hay varios mundos numéricos porque hay varias culturas. Encontraremos diferentes tipos de pensamiento matemático y, por lo tanto, diferentes tipos de números. [...] Hay, por tanto, más de una matemática" (: 253). Esto último es expresión de un relativismo extremo que no compartimos.

Lo planteado por Spengler proporciona las respectivas respuestas, desde su punto de vista, a cada una de las interrogantes antes formuladas. Pero, ¿podemos estar de acuerdo con esta posición de relativismo cultural extremo? Hemos de afirmar que no lo estamos, como tampoco compartimos la visión eurocéntrica de las matemáticas. Pareciera que hubiésemos llegado a una contradicción insalvable.

Poder deshacer el aparente nudo gordiano de esta situación involucra, de hecho, pensar en qué es la matemática. Conduce indisolublemente a otras interrogantes, como las que plantea White:

> ¿Existen verdaderas matemáticas en el mundo exterior, para ser allí descubiertas por el hombre, o son inventos humanos? La realidad matemática, ¿posee una existencia y validez independientes de la especie humana, o es una mera función del sistema nervioso de los hombres? (1976: 283)

Por supuesto que no pretendemos, en este breve ensayo, responder a estas últimas interrogantes. Ellas han suscitado una ardorosa polémica desde hace mucho tiempo y, en la próxima sección, señalaremos algunas posturas asumidas al respecto. Sin embargo, adoptaremos una posición con respecto a la relación de la matemática con la sociedad y con la cultura, la cual permitirá, a nuestro entender, aclarar el papel de esta disciplina dentro de la cultura de cada pueblo y explicar su aparente diversidad, sin necesidad de caer en un relativismo cultural que conlleve a pensar en una multiplicidad de matemáticas. En virtud de ello, es menester abordar otro punto candente: la definición de cultura, término altamente polisémico.

En la *Conferencia Mundial sobre las Políticas Culturales*, celebrada en México en 1982, el término *cultura* fue definido como "el conjunto de rasgos distintivos, espirituales y materiales, intelectuales y afectivos que caracteriza una sociedad o grupo social. Ella engloba, además de las bellas artes y las letras, los sistemas de valores, las tradiciones y las creencias".

Por su parte, Tylor asevera que "la cultura o civilización, tomada en un sentido etnográfico amplio, es esa totalidad compleja que incluye conocimientos, creencias, artes, moralidades, leyes, costumbres y cualesquiera otras capacidades y hábitos adquiridos por el hombre como miembro de la sociedad" (Citado en Bishop, 1999: 21).

En consecuencia, al ser las matemáticas un conocimiento y un producto intelectual, ellas forman, sin lugar a dudas, parte indisoluble de la cultura de una sociedad determinada. En ello coinciden actualmente muchos estudiosos, como por ejemplo Bishop, autor que, basado en una multiplicidad de estudios interculturales, constata que "las matemáticas son un fenómeno pancultural: es decir, existen en todas las culturas" (1999: 37), y que se puede determinar en ellas la presencia (con diferentes grados de evolución) de un conjunto de actividades y procesos que conducen a su desarrollo. Las actividades que se ha podido establecer son, fundamentalmente, seis: contar, medir, localizar, diseñar, jugar y explicar.

Hemos de volver a los planteamientos de Chapelon, quien expresaba que:

> Los comienzos de las matemáticas son los de toda ciencia; la presión de las necesidades sociales eleva poco a poco al nivel de la especulación científica lo que primitivamente no era más que una colección de recetas empíricas. El desarrollo inicial de las matemáticas está condicionado, pues, por las fuerzas productivas de una sociedad en continua transformación. Esta influencia de las fuerzas productivas va más allá del período inicial y domina toda la historia de las matemáticas. Las particularidades del progreso matemático corresponden a las particularidades del progreso social. (1948: 552)

¡He aquí el quid de la cuestión! El desarrollo de las fuerzas productivas de una sociedad en un momento histórico determinado, es clave para dilucidar el problema planteado y resolver la contradicción presentada.

Chapelon agrega que "las matemáticas nacieron cuando las necesidades de la vida material exigieron su existencia, cuando la técnica de una sociedad alcanzó un cierto nivel" (1948: 546). Bishop, por su parte, con respecto a las seis actividades antes señaladas, plantea que todas "están motivadas por necesidades relacionadas con el entorno y, al mismo tiempo, ayudan a motivar estas necesidades" (1999: 43).

Para entender mejor esto, necesariamente tenemos que apelar a lo expresado por Marx y Engels, quienes señalan que:

> El modo como los hombres producen sus medios de vida depende, ante todo, de la naturaleza misma de los medios de vida con que se encuentran y que se

> trata de reproducir. Este modo de producción no debe considerarse solamente en cuanto es la reproducción de la existencia física de los individuos. Es ya, más bien, un determinado modo de la actividad de estos individuos, un determinado modo de manifestar su vida, un determinado *modo de vida* de los mismos. Tal y como los individuos manifiestan su vida, así son. Lo que son coincide, por consiguiente, con su producción, tanto con *lo que* producen como con el *modo cómo* producen. Lo que los individuos son depende, por tanto, de las condiciones materiales de su producción. (1971: 19-20)

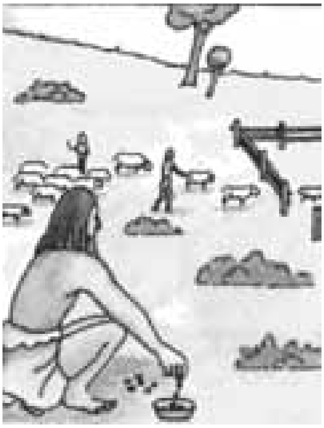
Estos determinados modos de la actividad y de manifestación de la vida no son otra cosa que la expresión de la cultura de una comunidad. Más aún, Marx y Engels clasifican las sociedades a partir de los distintos modos de producción y, además, la estructura social queda determinada por este modo de producción y por las relaciones sociales que de él se derivan. Sobre este aspecto, Marx explica que los hombres contraen ciertas relaciones de producción, las cuales:

> ... corresponden a una determinada fase de desarrollo de sus fuerzas productivas materiales. El conjunto de estas relaciones de producción forma la estructura económica de la sociedad, la base real sobre la que se levanta la superestructura jurídica y política y a la que corresponden unas determinadas formas de conciencia social. El modo de producción de la vida material condiciona el proceso de la vida social, política y espiritual en general. (1859: 343)

Entonces, si aceptamos estos planteamientos de los fundadores del materialismo histórico, el desarrollo de la cultura en general y, de la ciencia y de la técnica en particular (y por ende las matemáticas), dentro de una sociedad específica, queda sujeto al desarrollo de sus fuerzas productivas. Por lo tanto, los disímiles grados de desarrollo de distintos grupos humanos han tenido como consecuencia lógica diferentes grados de evolución en su conocimiento matemático.

En este sentido, Kedrov y Spirkin señalan que “los conocimientos pueden ser de diferentes clases: cotidianos, pre-científicos y científicos, empíricos y teóricos” (1968: 8). Considerar esta distinción es útil a nuestros propósitos, justamente porque explica buena parte de la variabilidad del conocimiento (matemático) presente en distintas sociedades, sin necesidad alguna a apelar al expediente de la existencia de una multiplicidad de matemáticas, como hace Spengler.

Figura 1



El concepto de número nació de la necesidad técnica de alcanzar el número cardinal. El primer matemático fue quizás un pastor de genio que, para contar los animales de su ganado, ideó una técnica de enumeración o de correspondencia, llegando en el fondo a captar el número cardinal por intermedio del número ordinal.

A nuestro juicio, las ideas antes expuestas aclaran suficientemente el tema del nexo entre matemáticas y cultura en una sociedad dada, así como queda también explicada la diversidad de desarrollos matemáticos que han podido encontrarse en distintas sociedades. No obstante, en la sección destinada a discutir el conocimiento matemático, tocaremos temas que tienen una vinculación estrecha con los aspectos aquí tratados.

Finalmente, adelantándonos a otros temas a ser tratados en el presente ensayo, debemos señalar que esta concepción materialista de la sociedad permite también ubicar y aclarar el papel que juegan dentro de ella instituciones como la escuela, estudiar la evolución de las matemáticas escolares y analizar procesos como la transposición didáctica.

3. El conocimiento matemático: tipología y características

En la segunda sección del presente trabajo ya habíamos aludido a la existencia de diferentes tipos de conocimiento. Aquí volvemos sobre el tema, pero enfocándonos más específicamente en el campo de las matemáticas. Retomamos este asunto por cuanto "la discusión sobre *¿qué es el conocimiento matemático?* no es trivial y afecta profundamente al diseño y desarrollo del currículo de matemáticas." (Rico, 1997: 382)

3.1. Tipos de conocimiento

El conocimiento, como parte integrante de la cultura desarrollada por una sociedad particular, puede estar en alguno de los tres estadios de desarrollo señalados por Kedrov y Spirkin (1968), a saber: conocimiento cotidiano, conocimiento pre-científico y conocimiento científico. Por supuesto que en aquellas sociedades que han alcanzado el nivel del conocimiento científico, coexisten con él los otros dos niveles.

Chapelon expresa, refiriéndose al surgimiento de las matemáticas, que en sus inicios éstas sólo tuvieron un carácter empírico, pre-científico, pero que luego se elevaron al nivel de una ciencia. Justifica su anterior afirmación aduciendo que "la más rudimentaria de las economías agrícolas necesita informes numéricos acerca de las estaciones. Esto implica la resolución de problemas ligados al establecimiento de un calendario" (1948: 547).

Más aún, podemos retroceder en el tiempo para encontrar rastros de conteo en comunidades muy primitivas, fundamentalmente mediante marcas realizadas sobre huesos. Así por ejemplo, Barrow señala que:

> La reliquia más antigua con muescas forma parte de un hueso de babuino, encontrado en las montañas de Swazilandia, que data aproximadamente del 35.000 a.C. Presenta 29 muescas y probablemente se trata de un arma en la que el cazador anotaba sus piezas. (1997: 31-32)

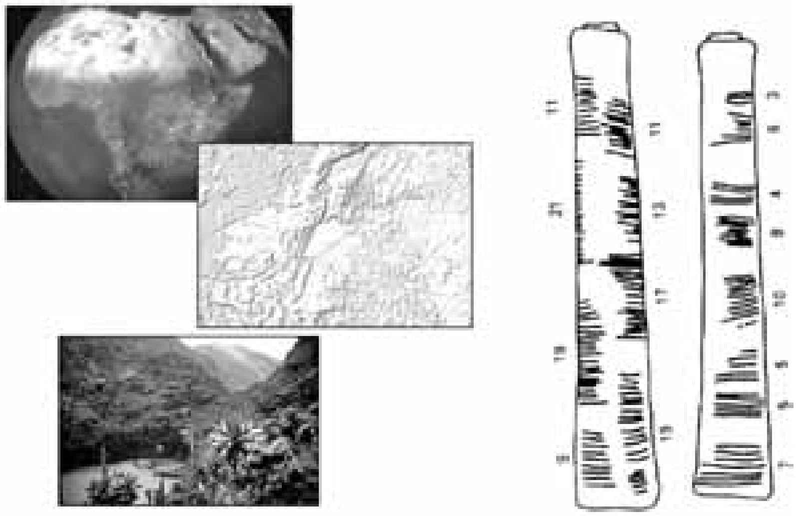
Otro hallazgo del mismo tipo fue el realizado en Vestonice, actualmente República Checa, donde fue encontrado

> ... un hueso de lobo, de unos 18 centímetros de longitud, que data aproximadamente del 30.000 a.C. Presenta una hilera de 25 muescas, luego dos marcas mayores, seguidas de otras 30 muescas, y muestra algún indicio de agrupamiento de las muescas de cinco en cinco (Barrow, 1997: 32) (Ver figura 2)

Figura 2

Pero tal vez el más notorio de estos descubrimientos sea el del hueso de Ishango, encontrado a orillas del lago Eduardo, en los límites de la actual República Democrática del Congo. Ambos lados del objeto están representados en la figura 3.

Figura 3



El pueblo que hizo las muescas en el hueso dejó rastros que permiten aseverar que se dedicaba a la caza y a la pesca como base de su subsistencia, teniendo como hábitat las orillas del lago. Su desaparición fue causada por una erupción volcánica.

La afirmación anterior sobre la notoriedad de este objeto arqueológico está justificada por la cantidad de estudios y conjeturas que sobre él se ha realizado. Así, Barrow nos dice que "las muescas están agrupadas de una forma sorprendente que ha dado lugar a hipótesis fantasiosas" (1997: 32-33).

Por otra parte, los estudios de la evolución humana y los realizados con niños de nuestra época permiten aseverar, como hacen Campiglio y Eugeni, que "la percepción visual consiente al hombre reconocer modestas cantidades de objetos sin contar. Está comprobado que podemos individualizar, con un golpe de ojo, y sin contar, hasta tres objetos, excepcionalmente 4" (1992: 38) y, además, que "los niños aprenden a muy temprana edad los términos que designan los números […], y su «contar» está generalmente asociado al uso de los dedos" (1992: 37).

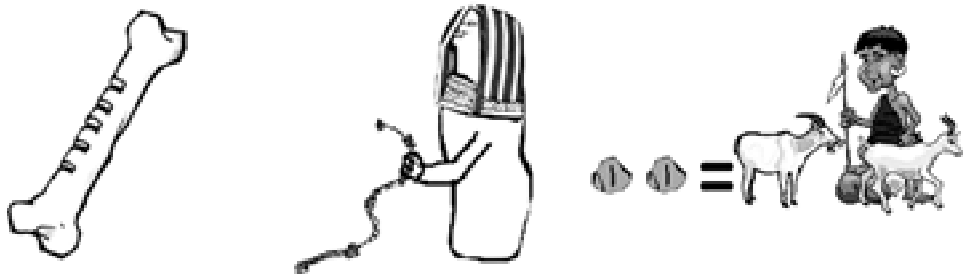
Más aún, investigaciones recientes han permitido corroborar que, de manera innata, niños de apenas pocos meses son capaces de diferenciar pequeñas cantidades. Así por ejemplo, Haith, Vasta y Miller hacen referencia a diferentes estudios sobre este aspecto. En uno de ellos:

> ...se muestra primero al bebé, varias veces, colecciones de un tamaño específico hasta que decae su atención. Se le presenta entonces un conjunto de tamaño nuevo. ¿Notan los bebés el cambio? Mientras la medida de los conjuntos es pequeña, bebés de sólo 3 meses aparentemente lo notan. (2008: 318)

Lo anterior es un hecho notable. Pero, "todavía lo es más la posibilidad de que los bebés puedan ser capaces de operaciones muy simples de aritmética" (Ibíd.), posibilidad sugerida por algunas investigaciones como las realizadas por Wynn[2], a principios de la década de los 90.

Así, "los seres humanos, e incluso algunos animales, parecen poseer un sentido natural del número que les permite detectar la presencia o ausencia de cantidades pequeñas" (Barrow, 1997: 28). Además, para los humanos, "es posible contar sin tener ningún sentido del número en absoluto. Esto se consigue generalmente mediante marcas" (: 30), como en los casos de los huesos antes citados. También, otros tipos de representaciones concretas como el empleo de nudos en cuerdas o de piedras, sirven a esta finalidad (ver figura 4).

Figura 4



Campiglio y Eugeni señalan que "partiendo de capacidades perceptivas análogas a las de los animales, el hombre crea el concepto de número, y los números, en momentos sucesivos" (1992: 41). Sin embargo, debemos advertir que, para alcanzar el concepto de número, la humanidad tuvo que recorrer un largo camino. Además, ello tiene que ver con un proceso que parte de lo perceptivo y evoluciona hacia lo cognitivo.

No obstante, en el estudio de culturas que tienen poco desarrollo tecnológico, "hay que tener cuidado en no confundir la inexistencia de palabras numerales con la inexistencia del sentido del número […], ya que existen culturas primitivas que poseen pocas palabras numerales pero que cuentan mediante gestos" (Barrow, 1997: 36). Incluso, no sólo debemos atender al lenguaje verbal, ya que el grabar marcas (como señalamos arriba) es la forma más antigua conocida del sentido numérico en los seres humanos.

2 *Wynn*, K. (1992). *Addition and substraction* by human infants. Nature. 358.

Figura 5

En Nueva Guinea diversas comunidades cuentan usando distintas partes de su cuerpo. En su meduloso libro, Ifrah (1997) estudia con detenimiento una multiplicidad de sistemas de conteo empleados por grupos humanos de todo el mundo.

Beyer (2005), por su parte, hace un recuento de algunos estudios acerca de este tema y enfatiza en ciertos sistemas de conteo de pueblos aborígenes venezolanos.

La discusión anterior, relacionada con la progresión del conocimiento matemático desde la fase cotidiana hasta la científica, así como con el hecho de que compartamos con otros seres vivos la posesión de un sentido numérico desde los primeros meses de nuestra vida, pasa por entender que diferentes especies animales (el hombre incluido) tienen la capacidad de formar *preceptos*, pero luego sólo los humanos tenemos la capacidad de pasar a una etapa superior, la de la formación de *conceptos*.

Señala Mosterín que “los *preconceptos perceptuales* o *preceptos* son los patrones o plantillas de nuestro sistema neurosensorial, que nos permiten identificar formas perceptuales cada vez que se presentan en el continuo de nuestras sensaciones”. Por otra parte, tenemos los *conceptos ordinarios*, que “son las unidades de representación simbólica del mundo de que disponemos en nuestro habla y en nuestro pensamiento articulado”. Por último, están los *conceptos científicos*, que son “o bien precisiones extraordinarias de conceptos ordinarios, o bien unidades simbólicas de nueva creación, establecidas por convención de la comunidad científica pertinente” (1981: 13).

En todo lo que llevandos dicho en la presente sección del trabajo, aún no hemos mencionado el hecho educativo y el papel que éste juega dentro del marco social, así como el tipo de conocimiento allí involucrado. A continuación, nos ocupamos de ello.

Lundgren apunta, muy acertadamente, desde nuestro punto de vista, que:

> ... la producción social implica no sólo producción de las necesidades de la vida y de los objetos materiales, sino también la producción de los símbolos, el orden y la evaluación de objetos y, a la vez, la producción de las condiciones

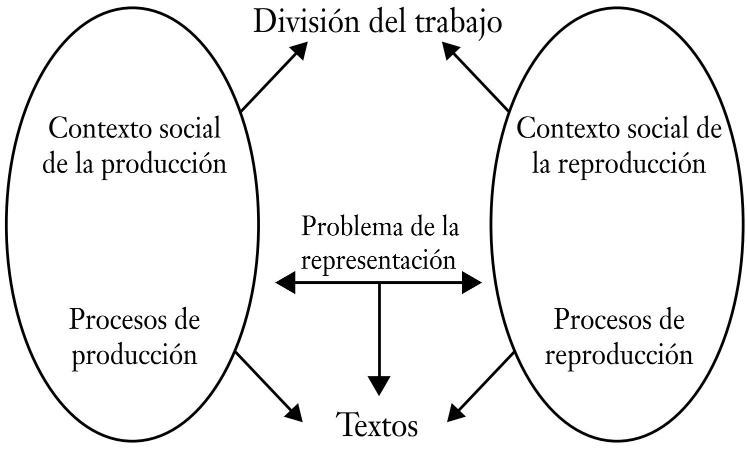
> de la sociedad en las que ésta continúa. Incluye, por tanto, trabajo manual y mental. (1997: 16)

Y continúa afirmando que:

> ... cuando los procesos de producción y de reproducción están unidos de un modo inextricable, el problema de la reproducción está íntimamente relacionado con los problemas de producción. El niño aprende el conocimiento y las destrezas necesarias para la producción participando en ella. No hay necesidad de tener un lenguaje especial para la educación; ni de pensar en términos de objetivos, fines o métodos de enseñanza. El problema de aprender es una parte de la producción. (: 18)

Pero, ¿qué ocurre cuando los procesos de producción y de reproducción se separan? Esta situación la ilustra Lundgren (1997: 19) mediante el siguiente gráfico (figura 6).

Figura 6



Este investigador explica dicha situación indicando que:

> Cuando los procesos de producción están separados de los de reproducción, se forman dos contextos sociales: uno para la producción y otro para la reproducción. [...] Cuando el niño no participa en la producción, el conocimiento y las destrezas necesarios para ésta tienen que ser clasificados, seleccionados y transformados en textos que pueden utilizarse en el contexto de la reproducción. (Lundgren, 1997: 19)

El significado de lo que él denomina "textos" lo aclara al expresar que "detrás de cualquier *currículum* debe haber un conjunto de principios según los cuales se formen la selección, la organización y los métodos de transmisión. [...] Yo denominaré al conjunto homogéneo de tales principios *código curricular*." (: 21), señalando además que "el primer tipo de código curricular, en el sentido de un texto producido para la educación y que organiza diversos campos del conocimiento, lo encontramos en la cultura de la antigua Grecia" (: 35).

Siguiendo estas ideas expuestas por Lundgren (1997), mismas que tienen consonancia con el planteamiento general que hemos venido formulando, podemos percibir que, en una institución creada *ex profeso* a los fines del proceso de reproducción, como lo es la escuela, se maneja en ella un tipo distinto de conocimiento.

Este tipo diferenciado de conocimiento no es otra cosa que el conocimiento escolar, presente en un currículo determinado y que es producido por ese proceso de clasificación, selección y transformación al que alude Lundgren, proceso que en el fondo no es otro que el de transposición didáctica. Sobre este último punto, el referido a la transposición didáctica, volveremos posteriormente. De momento sólo discutiremos algunos elementos importantes vinculados con el conocimiento escolar, sus características y sus diferencias con otros tipos de conocimiento.

Diversas fuentes hacen referencias o menciones a términos como "conocimiento escolar", "matemáticas escolares" o expresiones análogas. Así por ejemplo, el *National Council of Teachers of Mathematics*, en un importante documento publicado en 1980, plantea que "consideran los tres 'tipos' de matemáticas: (I) etnomatemáticas, (II) matemáticas escolares, (III) matemáticas elevadas (puras)" (NCTM, 1986: 33). En distintos documentos, conferencias y artículos, es bastante usual encontrar referencias a "diversos tipos de matemáticas". D'Ambrosio (2009), en la conferencia que dictara en el *VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática*, se pregunta si la matemática académica y la escolar son las mismas o son diferentes, y así titula su exposición. Por su lado, Dowling también marca las diferencias entre ambas categorías al señalar -en una nota- que "las matemáticas escolares han de distinguirse de otras actividades matemáticas, tales como las matemáticas académicas" (1996: 412).

Si enlazamos y/o contrastamos algunos de estos diferentes planteamientos e ideas, podemos identificar fácilmente, por ejemplo, lo que Kedrov y Spirkin (1968) denominan *conocimiento* (matemático) *cotidiano* y lo que el NCTM (1986) señala como *etnomatemáticas*.

En su investigación, Díez Palomar (2004: 37) nos presenta un cuadro de diferencias entre las matemáticas académicas y las matemáticas de la vida real, siendo estas últimas esencialmente lo mismo que antes denomináramos etnomatemáticas o conocimiento matemático cotidiano (ver figura 7).

Figura 7

Matemáticas académicas	Matemáticas de la vida real
Representación y relación entre medias y fórmulas Producción de regularidades Definición e integración de modelos Generalización	Identificación de matemáticas específicas en contextos generales Esquematización y visualización de problemas Descubrimiento de relaciones y regularidades Reconocimiento de similitudes entre diferentes problemas

Cuadro 2.1. Diferencia entre las matemáticas académicas y las matemáticas de la vida real .
Elaboración propia a partir de OCDE, 2002a.

Por su parte, Qualding realiza una diferenciación de tres "categorías" de matemáticas, que denomina "matemáticas de la vida corriente", "matemáticas prácticas" y "matemáticas de los matemáticos". A las primeras las señala como aquellas "que necesitamos para ocuparnos de nuestros asuntos diarios y aprovechar convenientemente nuestros ratos de esparcimiento" (Qualding, 1982: 443).

Como podemos apreciar en la discusión precedente, hay bastante consenso en la consideración de diversos tipos y/o niveles de conocimiento matemático. Sin embargo, es bastante común el uso libre de algunos términos, empleados por ciertos autores sin precisar detalladamente sus alcances.

3.2. El conocimiento escolar

Para nuestros fines, es de particular interés un conocimiento específico: el conocimiento matemático escolar. Pero, ¿qué se quiere decir con conocimiento (matemático) escolar o con matemáticas escolares?, ¿se diferencia éste de otros tipos de conocimiento? Chervel justifica el uso del término "disciplinas escolares" para referirse al conocimiento escolar organizado, especificando que:

> ... con este término, los contenidos de la enseñanza se conciben como entidades «sui generis», propias de la clase, independientes hasta cierto punto de cualquier realidad cultural ajena a la escuela y dotadas de una organización, una economía propia y una eficacia que sólo parecen deber a sí mismas, es decir, a su propia historia. (1991: 63)

No obstante, este autor aclara que, para evitar malos entendidos en torno a la relativa independencia de las disciplinas escolares señalada en la cita anterior, "suele admitirse que los contenidos de la enseñanza vienen impuestos como tales a la escuela por la sociedad que la rodea y por la cultura en la que está inserta" (: 64).

D'Ambrosio (2009) afirma que:

> Hay una gran diferencia entre lo que llamamos Matemática Académica, o simplemente Matemática, y la Matemática que se enseña en la escuela, que llamo Matemática Escolar. La verdad, ellas son diferentes en sus objetivos, métodos y contenidos, aunque pueda haber alguna coincidencia entre estos tres componentes, particularmente en contenidos básicos que aparecen en ambas.

A continuación y con base en lo planteado por Beyer (2009), procuramos establecer una tipología cuyas categorías integrantes son el conocimiento matemático académico, el escolar y el cotidiano. Además, puede hacerse una comparación entre ellas y establecer las distinciones y características esenciales de cada uno de estos conocimientos. Sintetizando la discusión propuesta por este autor, podemos señalar algunos elementos básicos que caracterizan los tres tipos de conocimiento matemático mencionados en el párrafo anterior. En el cuadro 1 mostramos estas características.

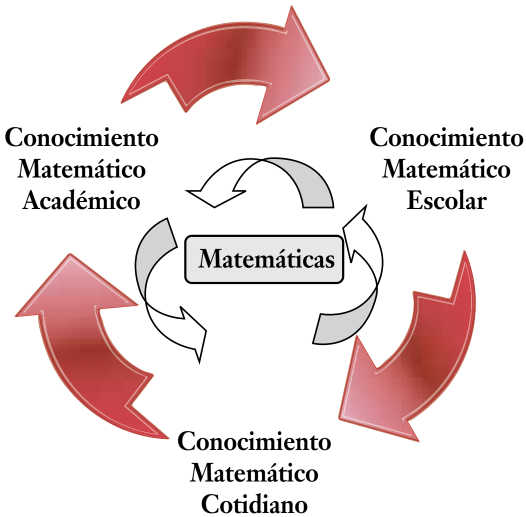
Cuadro 1

Conocimiento Matemático	Académico	Escolar	Cotidiano
Nivel formal	Alto	Intermedio	Bajo
Grados de abstracción	Generalmente alto	Ocasionalmente alto	Bajo
Escolaridad	Universitaria y postgrado	Nivel primario y secundario	No requiere
Institucionalización	Alta	Alta	Escasa
Se encuentra en	El currículo universitario de carreras de matemáticas, ingeniería y afines; obras especializadas, revistas, congresos	El currículo escolar, las obras didácticas	La vida diaria, los oficios
Ámbito	Universidades, centros de investigación, academias	La escuela	La sociedad en general
Nivel de contextualización	Generalmente muy descontextualizado	Poco contextualizado	Muy contextualizado
Practicidad	Teórico, poco intuitivo, aplicable en contextos específicos	Más o menos práctico, aunque no necesariamente útil, poco intuitivo, de escasa aplicabilidad	Muy práctico, intuitivo, de gran aplicabilidad

Como podemos apreciar, sólo se ha tomado en cuenta algunos elementos, los más importantes, para caracterizar cada tipo de conocimiento y así poder realizar una contrastación entre ellos. Los elementos considerados no son todos los involucrados, pero permiten hacer una notoria diferenciación entre estos distintos tipos de conocimiento.

Otra observación necesaria en este momento es que existe un complejo de relaciones entre los tres tipos de conocimiento antes señalados. Ellos se retroalimentan e influyen mutuamente. Estas influencias recíprocas, de acuerdo con lo que hemos venido planteando, van a estar marcadas y sujetas a variables y fenómenos de índole socio-cultural.

Figura 8



El la figura 8 representamos esquemáticamente las mutuas interrelaciones existentes entre los tres tipos de conocimiento matemático y destacamos una en particular, la transposición didáctica (TD), que fundamentalmente vincula el conocimiento matemático académico con el escolar y a la cual dedicamos un apartado en este artículo.

4. Una aproximación a diferentes concepciones de las matemáticas (académicas)

Históricamente, y aún en la actualidad, ha habido distintas concepciones acerca de ese cuerpo de conocimientos llamado matemática, especialmente para lo que hemos denominado conocimiento matemático académico o científico y que algunos también gustan en llamar saber sabio.

Debemos advertir que no vamos a tratar de dilucidar los aspectos filosóficos subyacentes en la matemática, como los de tipo ontológico. Sólo nos dedicaremos a revisar algunas de las principales concepciones que sobre este campo del saber se han realizado en el transcurso del tiempo. Además, son disímiles y hasta curiosas las tan variadas definiciones y/o caracterizaciones que se han propuesto sobre esta rama del saber.

Así, podemos mencionar que se la ha considerado ciencia, estudio, arte y hasta como un juego o lenguaje. Hay quien la ha tomado como parte de la lógica y también se la ha asociado con la cantidad, la magnitud, el orden, los patrones, la medida, el razonamiento y las formas (Beyer, 2009: 258).

Esta variedad de definiciones de matemática queda patente en el siguiente comentario de Newman:

> Felix Klein la describe como la ciencia de las cosas que son evidentes por sí mismas; Benjamin Pierce, como la ciencia que obtiene conclusiones necesarias; Aristóteles, como el estudio de la "cantidad"; Whitehead, como el desarrollo "de todos los tipos de razonamiento formal, necesario y deductivo"; Descartes, como la ciencia del orden y la medida; Bacon, como el estudio que hace a los hombres "sutiles"; Bertrand Russell, identificándola con la lógica; David Hilbert, como un juego formal sin significación. Ninguna de esas afirmaciones permite una captación plena del tema, aunque una o dos sean de verdadera importancia. (1976: 217-218)

Acerca de las dificultades definitorias, Haussman señala que:

> ... luego de haber dedicado este capítulo a ilustrar lo que es ella [la matemática], sería justo terminarlo con una definición. Y sin embargo no lo haremos en razón de la dificultad de la empresa: no existe una definición de la matemática que hasta ahora haya sido generalmente aceptada, sin estar expuesta a muy serias críticas. (1968: 86)

A continuación y de manera sintética, haremos un recorrido por algunas de las concepciones más notables que se han elaborado sobre esta disciplina.

4.1 Las concepciones provenientes de la Grecia clásica

El mismo término "matemática" es de origen griego y se atribuye a Pitágoras la iniciativa en su uso. Este personaje, mezcla de misticismo y de creación intelectual, planteó la idea de que la explicación del mundo estaba fundada en las matemáticas y llegó a la conclusión de que "todo es número". Es decir, que los números eran el principio último de todas las cosas. Puede apreciarse aquí una orientación especulativa de la disciplina alejada de la práctica y de la aplicabilidad de tal conocimiento. Ello marca una diferencia sustancial entre la matemática griega y las de otras culturas como la egipcia y la mesopotámica, cuyos enfoques eran eminentemente prácticos.

Señala Anatolio, quien fuese obispo de Laodicea, que “los pitagóricos aplicaron, así se cuenta, el nombre de la matemática más en propiedad a la geometría y a la aritmética solamente; que en tiempos anteriores, cada una de ellas tenía nombre aparte, sin nombre alguno común a ambas” (García Bacca, 1961: 15). Dentro de su concepción del mundo, los pitagóricos redujeron la música a simples relaciones numéricas, de lo cual devino la creación de la escala musical, e hicieron lo mismo con los movimientos de los astros.

Al respecto, Kline señala que “puesto que los pitagóricos «reducían» la astronomía y la música a números, se las podía relacionar con la aritmética y la geometría, y los cuatro temas eran considerados como matemáticas” (1985: 14). Estos cuatro elementos es lo que se conoce como el *Quadrivium*.

Aristóteles, en su *Metafísica*, señala esta visión numérica del mundo por parte de los pitagóricos, expresando que:

> ... veían semejanzas de las cosas que existen o pueden existir con números […] dado que las variaciones y las proporciones de las escalas musicales eran expresables con números; puesto que, además, todas las otras cosas parecían estar en toda su naturaleza modeladas con números, y los números parecían ser la primera de las cosas de la naturaleza, ellos supusieron que los elementos numéricos eran los elementos de todas las cosas y que los cielos eran una escala musical y un número. (Citado en Kline, 1985: 14-15)

García Bacca comenta un texto de Porfirio en una nota, señalando que:

> El Quadrivium pitagórico se componía, según Nicómaco, Teón de Esmirna y Proclo, de aritmética, música, geometría y esférica. Por esférica parece deber entenderse la astronomía, o geometría de la esfera en relación a las esferas celestes, cual ejemplar real modélico de realización acabada de la esfera pura. (1961: 75)

Todos estos conocimientos, que estaban englobados dentro de las matemáticas, “formaban parte del programa de estudios y siguieron siéndolo hasta la época medieval, en que recibieron el nombre de cuadrivio” (Kline, 1985: 14).

Puede observarse que se va delineando progresivamente la estructura disciplinar de las matemáticas (matemática académica), pero que también toma cuerpo la estructura del conocimiento a ser transmitido, a ser enseñado: el *Quadrivium*.

Godínez Cabrera apunta que:

> ... desde Platón se llamó *matemáticas* a la agrupación de la geometría, la aritmética y la astronomía, aunque los pitagóricos habían incluido también a la música. Posteriormente, durante el tiempo de Arquímedes (siglo III, a.C.) se incluían también la mecánica, la óptica, la geodesia y la logística . [...] Esta agrupación no prosperó y se siguió considerando posteriormente la agrupación pitagórica. (1997: 46)

Esta concepción de la matemática ha tenido una influencia notoria, tanto dentro del campo de la disciplina como fuera de ella y pervive aún en nuestros tiempos.

Otro de los grandes pensadores griegos, Platón, tuvo y tiene también una enorme importancia en lo que a concepciones de la matemática se refiere. Se interesó por las matemáticas, como muchos de los filósofos, escribiendo en el frontispicio de la Academia "*Nadie entre aquí sin saber geometría*". Su concepción del mundo tenía como base la creencia de que a nuestros conceptos corresponde, fuera de la mente, una realidad objetiva semejante al objeto representado en aquellos y a esta realidad la llama *idea*. En consecuencia, las ideas a las que se refiere Platón son cosas extra-mentales, las únicas auténticas realidades, según él, situadas fuera del mundo sensible; éstas son inmutables y eternas. Además, no son conceptos intelectuales, pero son susceptibles de manifestarse al intelecto y se aprehenden con la inteligencia.

A esta doctrina filosófica se la conoce como *realismo*, por cuanto sostiene que los universales realmente existen. A esta postura se opuso, durante la Edad Media, la corriente denominada *nominalismo*, para la cual las especies y los géneros, y en general los universales, no son realidades anteriores a las cosas, como sostenía el realismo. Para los nominalistas, las ideas generales no son otra cosa que nombres.

Dada la enorme influencia ejercida por Platón en el pensamiento occidental, evidentemente éste impactó de manera decidida en las concepciones de matemáticas. Así, "varios matemáticos interpretan los métodos del platonismo en el sentido del realismo conceptual, postulando la existencia de un mundo de objetos ideales que incluye todos los objetos y relaciones de la matemática" (Bernays, 1982: 20).

Bajo esta concepción, que Bernays denomina *platonismo*, el matemático ni inventa ni crea, sólo descubre, ya que los objetos matemáticos son preexistentes a él. Para aclarar un poco más la situación, señala que "Euclides habla de *construir* figuras, mientras que para Hilbert los sistemas de puntos, rectas y planos existen desde el principio" (Bernays, 1982: 16).

Por su parte, para Aristóteles la matemática era la *ciencia de la cantidad*. Hacemos notar aquí que la *cantidad* es una de las diez *categorías* de la filosofía aristotélica. En este sentido, Escoto Eriúgena, filósofo y teólogo del siglo IX, apunta:

> Aristóteles -según dicen, el más agudo entre los griegos en mostrar la distinción de las cosas naturales- clasificó en diez géneros las innumerables variedades de cosas que existen a partir de Dios y creadas por Él; y los denominó categorías o predicamentos. [...] Los griegos los denominaron: *ousía*, *posótes*, *poiótes*, *prós ti*, *keîsthai*, *héxis*, *tópos*, *chrónos*, *práttein* y *patheîn*, que en latín se llaman: esencia, cantidad, cualidad, relación, situación, hábito, lugar, tiempo, acción, pasión. (1984: 74)

Aristóteles dedica un capítulo completo de su *Lógica* a explicar qué es la *cantidad*. Señala que "la cantidad es o bien discreta, o bien continua" (Aristóteles, 1977: 237) Entre las cantidades discretas señala el *número*, pero también incluye la locución o frase. En las continuas señala la *línea*, la *superficie*, el *sólido* y añade el *tiempo* y el *lugar*. En su obra *Metafísica* retoma este tema, dedicándole nuevamente un capítulo completo y en ella vuelve a definir lo que es *cantidad*, indicando que:

> Se llama cantidad a lo que es divisible en elementos constitutivos, de los cuales cada uno o por lo menos uno es naturalmente apto para poseer una existencia propia. La pluralidad, por tanto, es una cantidad si se puede contar, y una magnitud lo es si puede ser medida. Se llama pluralidad al conjunto de seres que es divisible en potencia en seres discontinuos, y magnitud a lo que es divisible en partes continuas. Una magnitud continua en un sólo sentido se llama longitud; la que lo es en dos sentidos, latitud, y la que lo es en tres, profundidad. Una multitud finita es el número, una longitud finita es la línea, una latitud determinada es una superficie, una profundidad limitada es un cuerpo. (1977: 969-970)

Abundando en sus razonamientos acerca de la cantidad, Aristóteles expresa que "hay cuatro clases de cambios, el de esencia, el de cualidad, el de cantidad, el de lugar, y a su vez el cambio […] de la cantidad puede ser de aumento o de disminución" (: 1049). Por otra parte, en un pasaje de su obra precisa el tipo de estudio que le toca hacer al matemático. Indica allí que:

> El matemático opera sobre puras abstracciones pues realiza su estudio especulativo abstrayendo todos los caracteres sensibles, por ejemplo, la pesantez y la ligereza, la dureza y su contrario, lo mismo el calor y el frío y todas las demás contrariedades sensibles, y deja tan solo la cantidad y la continuidad, y esas en una, dos o tres dimensiones; y estudia las modificaciones de la cantidad y el continuo, en cuanto cantidad y continuo, sin estudiarlos en otras relaciones; y estudia además, sus posiciones relativas y lo que conllevan estas posiciones, en unas la conmensurabilidad o la inconmensurabilidad, en otras sus proporciones, sin que por ello consideremos que es más de una ciencia, que es la Geometría, la que se ocupa de todo esto. (1977: 1036)

Para Aristóteles, "la ciencia matemática es también una ciencia teórica o especulativa, que trata además de seres permanentes o inmutables, pero no independientes de la materia" (: 1041). En diversas partes de su obra, refuta el pensamiento pitagórico. Entre sus críticas expresa:

> Los filósofos llamados pitagóricos se sirven de los principios y de los elementos de una manera más rara aún que los naturalistas o físicos. La razón de ello está en que toman sus principios de fuera del mundo de las cosas sensibles; los seres matemáticos, en efecto, carecen de movimiento o cambio, excepto aquellos que caen bajo el dominio de la astronomía. [...] Pero no dicen nada sobre cuál será el origen del movimiento ni sobre si hay otras sustancias fuera

> de lo finito y lo infinito, lo par y lo impar. Tampoco explican cómo pueden verificarse sin cambio la generación y la destrucción, o cómo se realizan las revoluciones de los cuerpos astronómicos. (: 923)

Es necesario aclarar aquí que las concepciones pitagórica y aristotélica difieren en aspectos fundamentales. Para Aristóteles, todo cuanto existe en el espacio y en el tiempo está compuesto de materia y forma, las cuales no existen por separado sino como una unidad sintética que le da realidad a la sustancia. Así, para él la naturaleza está formada por los seres compuestos de materia y forma y no sobre la base de los números, como pretendían los pitagóricos. Sin embargo, ambas posiciones coinciden al estar impregnadas de un carácter idealista y, en consecuencia, su visión de la matemática también. Asimismo, la doctrina platónica tiene un carácter plenamente idealista.

4.2. Del Medioevo a la modernidad

Estudiando a los autores citados en este apartado, podemos notar cómo las diversas concepciones griegas de la matemática persistieron en el tiempo. En torno al tema que se discute, es interesante la visión que en el siglo IX tenía Escoto Eriúgena. En su obra, el maestro le pregunta al alumno:

> ¿Te parece que la propiedad característica de la cantidad puede ser otra que el número de las partes, o espacios, o medidas, tanto si se trata de partes continuas, como es el caso para las líneas, los tiempos y demás que se cuentan entre las cantidades continuas, como si son discontinuas, separadas por determinados límites naturales, tal como los números, o aquella multitud de cosas en las que es manifiesto que se da una cantidad discreta? (1984: 87-88)

Ahonda este autor en el tema, señalando que “el número de [medir] los espacios y las líneas de los cuerpos geométricos se asigna a la cantidad” (: 118). Como se puede apreciar, subyacen aquí tanto el viejo aforismo pitagórico: “Todo se puede conocer con el número. Nada se puede conocer sin el número”, como las ideas de Aristóteles en torno a la *cantidad*.

En el Medioevo, en pensadores como Isidoro de Sevilla, se nota esta influencia del pensamiento griego. Además de indicar que la matemática está formada por cuatro ciencias, este autor da una definición de ella: *ciencia que estudia la cantidad abstracta*. Durante toda la Edad Media, esta definición y agrupación de la matemática se continuó utilizando (Godínez Cabrera, 1997: 46).

Ya ubicados en el Renacimiento, las concepciones griegas acerca de las matemáticas se mantienen vivas. Así, Luca Pacioli (1445-1514), respecto a lo que debe entenderse por los vocablos “matemática” y “disciplinas matemáticas”, anota en el Capítulo III de su insigne obra de 1509, *La divina proporción*, que:

> Este vocablo, Excelso Duque, es griego, derivado de la palabra que en nuestra lengua significa *disciplinable*; y, para nuestro propósito, por ciencias y disciplinas matemáticas se entienden la aritmética, la geometría, la astronomía, la música, la perspectiva, la arquitectura y la cosmografía, así como cualquier otra dependiente de éstas. Sin embargo, comúnmente, los sabios consideran como tales a las cuatro primeras, es decir, la aritmética, geometría, astronomía y música, llamando a las demás subalternas, es decir, dependientes de estas cuatro. Así lo quieren Platón y Aristóteles, Isidoro en sus Etimologías y Severino Boecio en su Aritmética. (Pacioli, 1991: 38)

En otros estudiosos, como el gran erudito español del siglo XVI Juan Luis Vives (1492-1540), se sigue notando claramente la pervivencia de las ideas de los griegos acerca de las matemáticas, en particular las de Pitágoras y las de Aristóteles. Señala Vives que:

> Aquellas artes que versaban acerca de la cuantidad llamáronlas los griegos *matemáticas*, que equivale decir *disciplinadas*. A la cuantidad hiciéronla doble, de *volumen* y de *número*. Única es la disciplina que trata de la cuantidad de volumen, a la que de la medida de la tierra llamáronla *geometría*. Única es también la disciplina que trata de la cuantidad de número, a saber: la *aritmética*, cuya etimología da a entender *materia*. La geometría trasladada a la esfera celeste hizo la *astronomía*. El *número* aplicado a la armonía hizo la música. (1985: 213)

En este breve recorrido histórico, puede apreciarse la pervivencia de las ideas griegas en torno a las matemáticas, las cuales alcanzan a influir aún en nuestra época.

Sin embargo, al llegar el siglo XVII se suceden cambios trascendentales en el conocimiento matemático. Es el siglo en el cual se desarrolla el cálculo infinitesimal, la geometría analítica, la teoría de las probabilidades y otras importantes ramas de las ciencias exactas. Es la matemática del movimiento, con una visión ligada a los problemas que planteaban tanto la física como la astronomía. Se da aquí una total revolución de la disciplina, iniciándose un nuevo período: el de la "*formación de las magnitudes variables*", el cual Kolmogorov (1936) sitúa entre la aparición de las nuevas concepciones aportadas por Newton, Descartes y otros científicos importantes, y finales del siglo XIX.

La introducción del estudio de las magnitudes variables como parte de la matemática, respondió en gran medida a la necesidad de resolver los problemas que planteaba el desarrollo socioeconómico alcanzado en el siglo XVII. A estos fines, una matemática como la griega, de carácter estático, no era la más adecuada. Además, en otras áreas más bien ligadas al comercio, ya se había ido imponiendo fuera de las instituciones académicas una aritmética práctica, basada en el sistema de numeración decimal y habían proliferado las obras de aritmética comercial.

El preámbulo a esta revolución dentro de la matemática, ligada en buena parte a la física, estuvo enmarcado por los albores de la ciencia experimental, destacándose en ella el gran científico Galileo Galilei (1564-1642). El genio expresa, en su célebre obra *Saggiatore* (El Ensayador, 1610), que:

> La filosofía [la naturaleza] está escrita en ese gran libro que tenemos siempre delante de nuestros ojos -quiero decir el universo-, pero no podemos entenderla si primero no aprendemos el lenguaje y captamos los símbolos con los que está escrita. El libro está escrito en el lenguaje matemático y los símbolos son los triángulos, los círculos y otras figuras sin cuya ayuda es imposible entender una sola palabra sin la que caminamos errantes por un oscuro laberinto. (Citado en Dudley, 1993: 157)

Es ésta una concepción de acuerdo a la cual la matemática se convierte en un lenguaje para la ciencia, que serviría para describir las leyes que rigen el mundo.

Cierta ruptura con el pensamiento tradicional griego se percibe en matemáticos como George Boole (1815-1864), quien expresaba que "no es la esencia de la matemática ocuparse de las ideas de número y de cantidad [pues la matemática trata de] operaciones consideradas en sí mismas, independientemente de las materias diversas a las que puedan ser aplicadas" (citado por García Borrón, 1987: 105).

4.3. ¿Qué hay en los tiempos más recientes?

A pesar de la distancia en el tiempo, el platonismo ejerció una notable influencia en pleno siglo XX y a él se acogieron bastantes matemáticos. Entre éstos puede citarse a Frege, Russell en sus *Principia*, y Lukasiewicz y Scholz. Bernays (1982) también ubica dentro de esta tendencia a Hilbert.

Con el paso de los años, surgirían otras formas de concebir las matemáticas. En este sentido, Barrow señala que:

> ... del campo empirista emerge el credo del *invencionismo*, que ve las matemáticas como ni más ni menos lo hacen los matemáticos. Se trata de una invención de la mente humana con fines concretos, que pueden ser de carácter práctico o estético. Las entidades matemáticas tales como «conjuntos» o «triángulos» no existirían si no hubiera matemáticos. Nosotros inventamos las matemáticas, no las descubrimos. (1997: 8)

Esta es una visión diametralmente opuesta a la del realismo platónico.

Como consecuencia de la famosa "crisis de los fundamentos", se originaron tres grandes escuelas, a saber: la logicista, la intuicionista y la formalista. Hacemos notar que "estas escuelas se contraponen no sólo en relación al problema de la consistencia lógica de las matemáticas; también en otros puntos de sus fundamentos" (Chela, 1986: 46)

Los logicistas, como Russell, plantean la reducción de las matemáticas a la lógica. Para Russell "si una hipótesis no tiene relación con una o varias cosas particulares, sino con cualquier objeto, tales inferencias constituyen las matemáticas" (Guétmanova, 1989: 295-296). Así, las matemáticas puras representan "un conjunto de inferencias formales, independientes de cualquier contenido, es decir, una clase de enunciados que se expresan exclusivamente en términos de variables y en constantes solamente lógicas" (: 296).

Como reacción a estos planteamientos, encontramos a la escuela intuicionista, la cual "se niega a utilizar la abstracción del infinito actual, rechaza la lógica como ciencia antecedente a las matemáticas y enfoca la claridad y convicción intuitivas ('intuición') como el definitivo fundamento de las matemáticas y la lógica" (Guétmanova, 1989: 298).

Asimismo, el intuicionismo, para evitar las antinomias, niega el principio del tercero excluido.

Debemos señalar que logicistas e intuicionistas difieren tanto en la concepción de los entes matemáticos como en el aparato deductivo que emplean.

La tercera escuela, la formalista, considera las expresiones matemáticas como meros símbolos o signos carentes de toda significación concreta, excepto la que el signo mismo tiene por su figuración propia. Estos signos se combinan estrictamente por las reglas de inferencia que se adopta y que constituyen la lógica del sistema (Chela, 1986: 48).

Acotamos que puede reencontrarse, dentro de las escuelas antes estudiadas, los rasgos básicos de varias de las corrientes filosóficas que disputaban la preeminencia en la Edad Media.

Quine afirma que "la gran controversia medieval de los universales ha vuelto a encenderse en la moderna filosofía de la matemática" (1984: 40), y agrega:

> Los tres puntos de vista principales en la Edad Media a propósito de los universales, han recibido de los historiadores los nombres de *realismo*, *conceptualismo* y *nominalismo*. Las mismas tres doctrinas vuelven esencialmente a aparecer en los resúmenes de la filosofía de la matemática en el siglo XX, bajo los nombres de *logicismo*, *intuicionismo* y *formalismo*. (: 41)

El apareamiento antes expresado lo explica Quine estableciendo analogías entre las corrientes:

> *Realismo*, cuando la palabra se usa en el contexto de la controversia medieval sobre los universales, es la doctrina platónica de que los universales, o entidades abstractas, tienen un ser independiente de la mente; ésta puede descubrirlos, pero no crearlos. El *logicismo*, representado por Frege, Russell,

> Whitehead, Church y Carnap, permite usar variables ligadas para referirse indiscriminadamente a entidades abstractas conocidas o desconocidas, especificadas o no. El *conceptualismo* sostiene que hay universales, pero que son producidos por la mente. El *intuicionismo*, asumido en los tiempos modernos, de un modo u otro, por Poincaré, Brower, Weyl, etc., defiende el uso de variables ligadas para referirse a entidades abstractas sólo en el caso de que tales entidades puedan ser elaboradas a partir de ingredientes previamente especificados. (: 41)

Quine aborda la corriente del *formalismo* que, aún cuando considera poco satisfactorio el enfoque logicista, tampoco comulga con la solución dada por los intuicionistas. Sobre ella señala:

> ... al igual que el antiguo *nominalista*, [el formalista] puede negarse en redondo a admitir entidades abstractas, incluso en el sentido restringido de entidades producidas por la mente. […] el formalista concibe la matemática clásica como un juego de notaciones no significantes. (: 42)

Veamos a continuación cómo los materialistas dialécticos enfocan este asunto.

Guétmanova señala que, para Brouwer, "las matemáticas puras representan la libre creación de la razón y nada tienen que ver con los hechos experimentales. Para los intuicionistas, la intuición es la única fuente de las matemáticas" (1989: 299), y agrega que:

> ... en 1936, A. Kolmogorov, matemático soviético, critica las bases idealistas subjetivas del intuicionismo, afirmando que no se podía estar de acuerdo con los intuicionistas cuando hablaban de que los objetos matemáticos eran producto de la actividad constructiva de nuestro espíritu, ya que los objetos matemáticos son abstracciones de las formas existentes en la realidad independiente de nuestro espíritu. (: 299-300)

Aquí renace la vieja polémica filosófica entre idealismo y materialismo. Guétmanova asienta los puntos de contacto, así como las sustanciales diferencias entre la posición asumida por los intuicionistas y la de los materialistas (principalmente soviéticos, quienes se apoyan en el materialismo dialéctico), en temas como las bases metodológicas. Más aún, para separar ambos punto de vista, a la escuela soviética muchas veces se la menciona como *constructivista*.

Sobre el enfoque materialista, señala Labérenne que:

> El materialismo dialéctico […] permite también comprender de dónde provienen los súbitos enriquecimientos. Su análisis fundado en la interdependencia de las ciencias y en los lazos de acción y reacción entre el espíritu y la naturaleza, elimina el carácter "gratuito" y puramente "formal" que se da a menudo a algunos descubrimientos. (1948: 411)

Por su parte, dentro de la matemática académica, una de las tendencias que fue ganando importancia con el paso del tiempo y que tuvo un enorme ímpetu durante el siglo XX es la *estructuralista*. Dentro de ésta, como su nombre lo indica, lo esencial son las estructuras. Sobre esto, Marshall Stone dice:

> Un matemático moderno preferiría caracterizar positivamente su campo como el estudio de sistemas generales abstractos, cada uno de los cuales se construye con elementos abstractos específicos y está estructurado por la presencia de relaciones arbitrarias pero inequívocas entre ellos. (Citado en Kline, 1976: 137)

Dentro de esta misma óptica, Bosch indica que “la matemática actual es el estudio de las diversas estructuras y de las relaciones entre ellas” (1971: 121).

Los grandes promotores de este enfoque fueron los integrantes del grupo Bourbaki. Sin embargo, muchos subsumen está visión dentro de la corriente formalista. La influencia de este grupo fue enorme, no sólo dentro del propio campo de las matemáticas, sino también en el de la educación, ya que dio pie al vasto movimiento de la Matemática Moderna, el cual envolvió a un gran número de países.

Bourbaki, en su clásico artículo *La arquitectura de las matemática*s, explica su posición. Basa su punto de vista en la consideración de tres grandes tipos de estructuras (las estructuras-madres): algebraicas, de orden y topológicas. Asimismo, adopta el método axiomático. Señala que “codificar este lenguaje [el propio de la matemática], ordenar su vocabulario y clarificar su sintaxis es cumplir una tarea muy útil, que constituye efectivamente un aspecto del método axiomático” (1948: 38). Además, agrega que “el principio ordenador será la concepción de una *jerarquía de estructuras*, que va de lo simple a lo complejo, de lo general a lo particular” (: 45).

Debemos anotar, sin embargo, que Bourbaki no constituye una escuela filosófica de las matemáticas, como sí lo son el logicismo, el intuicionismo y el formalismo. Ello se desprende de su propia afirmación:

> No pretenderemos examinar las relaciones de las matemáticas con lo real o con las grandes categorías del pensamiento; es en el seno de la matemática en donde pensamos quedarnos para buscar, analizando sus propios vericuetos, una respuesta a la pregunta que nos hemos planteado. (1948: 37)

Por si fueran pocas las dificultades de diversos órdenes a las cuales se ha hecho mención en este apartado, han emergido muchas otras visiones acerca de las matemáticas.

Entre estas otras visiones, destacamos la propuesta de Imre Lakatos (1987) quien opone las teorías cuasi-empíricas a las teorías euclídeas (logicismo, intuicionismo, formalismo). Una teoría cuasi-empírica se desarrolla de manera muy diferente, parte de problemas, le siguen las soluciones arriesgadas y después vienen los tests severos, las refutaciones. El vehículo del progreso se encuentra en las especulaciones audaces, la crítica, la controversia entre teorías rivales, los cambios de problemas y la atención se centra siempre en los bordes oscuros. La matemática cuasi-empírica es una matemática conjetural y especulativa, cuya regla principal es la formulación de hipótesis atrevidas con gran potencia explicativa y heurística.

Dentro de los enfoques socio-culturales está, por ejemplo, la propuesta de la etnomatemática, la cual, en una de sus versiones radicales, asume que "en verdad, uno debería considerar cualquier tipo de matemática, incluyendo la 'matemática de la escuela', la 'matemática universitaria', o la 'matemática profesional' (la matemática concebida y practicada por la comunidad de matemáticos profesionales) como formas de Etnomatemática" (Mtetwa, 1992: 65).

Por último, hemos de agregar visiones como las del interaccionismo simbólico y otros, quienes conciben a las matemáticas como un lenguaje. Dentro de esta óptica podemos situar a Skovsmose, que afirma: "las matemáticas pueden ser caracterizadas de diferentes maneras -incluyendo como un lenguaje-. Como tal, ellas se convierten en un instrumento de desarrollo de conocimiento y en un intérprete de la realidad social" (1994: 4).

5. La weltanschauung (cosmovisión) del educador

La *weltanschauung* (cosmovisión) del docente es un concepto escasamente empleado o usado con bastante laxitud en el ámbito educativo, sin proponer una definición explícita que demarque el contenido y alcances que dicho término encierra dentro de este contexto. Uno de los objetivos del presente trabajo es, justamente, darle cuerpo a este concepto para que pueda ser extensivamente empleado como herramienta de análisis del hecho educativo.

Emprendemos a continuación una breve discusión sobre el particular, a fin de determinar el sentido que le atribuimos a tal término.

5.1. ¿Qué es la weltanschauung?

El término *weltanschauung* proviene del campo de la filosofía, a través del alemán Wilhelm Dilthey (1833-1911). A este respecto, Frischeisen-Köhler y Dilthey delimitaban la noción de *weltanschauung*, señalando que debe entenderse por ello a la suma o también [...] el complejo de todas las opiniones y de los juicios, las declaraciones y las confesiones que fueron expresadas sobre la naturaleza y el significado del mundo entero con inclusión de la humanidad" (2009: 173).

Esta *weltanschauung* (que puede traducirse literalmente como concepción de mundo, visión de mundo o cosmovisión), para estos filósofos, está referida a la estructura psíquica que cada individuo o conglomerado de personas se forma sobre la base de sus experiencias religiosas, artísticas y filosóficas, para articular su manera de comprender y dar sentido a la vida y al mundo en el seno de una determinada cultura o civilización; o resumidamente, constituye *una visión comprehensiva o filosofía personal acerca de la vida humana y del universo*.

Recientemente, el académico Funk ha discutido este concepto. Postula que "en el corazón del conocimiento de cada individuo está su propia visión del mundo o *weltanschauung*" (2001).

A la interrogante de "qué es la *Weltanschauung*" con que titula su reflexión, responde que "una cosmovisión es el conjunto de creencias acerca de aspectos fundamentales de la Realidad que cimentan e influencian todas nuestras percepciones, pensamientos, conocimientos y acciones" (Ibíd.). Su análisis, como él mismo señala, está basado en buena medida en la ideas de Hunter Mead. Para aclarar el concepto, emplea dos diagramas: en uno está la relación del individuo (y su cosmovisión) con los demás individuos (y con sus respectivas cosmovisiones) y con el mundo (figura 9); y en el otro muestra al individuo conjuntamente los elementos que influyen en y/o conforman su cosmovisión en el contexto de sí mismo (figura 10).

Figura 9

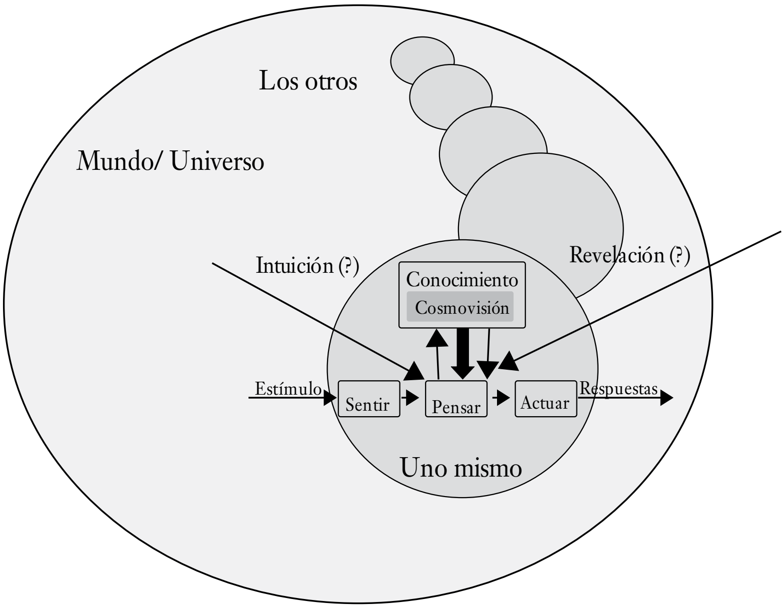
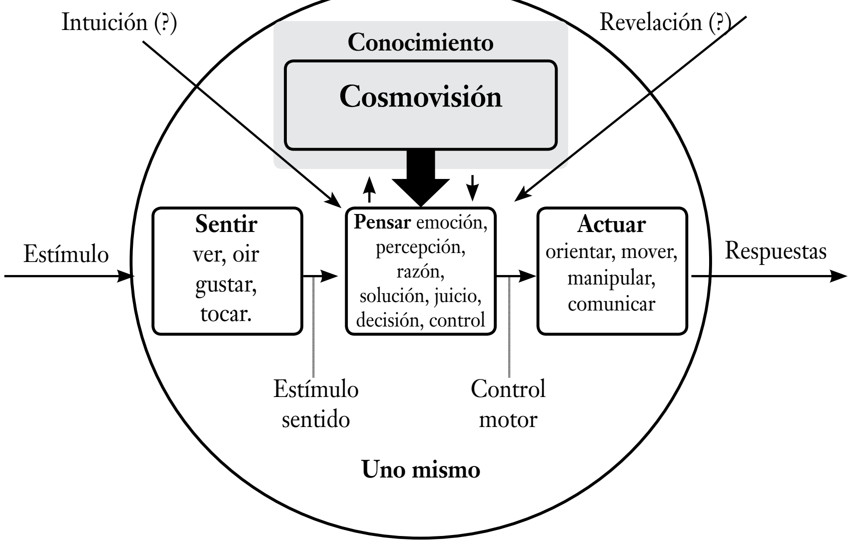


Figura 10



Podemos observar que Funk discrimina (en los diagramas) el conocimiento con respecto a la cosmovisión. Además, desintegra aquél en opiniones, creencias y certidumbres, mientras que separa a ésta en diversos elementos: epistemología, metafísica, cosmología, teleología, teología, antropología, axiología.

En su definición, señala explícitamente que la *weltanschauung* "está en el corazón del conocimiento de cada individuo" y, a su vez, que ésta influencia ese conocimiento. Sin embargo, nosotros preferimos ir un poco más allá, dando un paso adelante, y considerar que también el conocimiento influencia y modifica (¿puede modificar?) la cosmovisión. Es decir, asumimos un punto de vista dialéctico al respecto, de mutuas interrelaciones entre ambos aspectos. Funk explica los diversos elementos constituyentes y/o interrelacionados con la cosmovisión. En torno a las creencias que conforman la cosmovisión del individuo, señala las siguientes:

- **epistemología**: engloba las creencias acerca de la naturaleza y de las fuentes del conocimiento, su base y su validación;
- **metafísica**: creencias acerca de la naturaleza última de la realidad, acerca de qué es la verdad;
- **cosmología**: creencias acerca del origen y naturaleza del universo, de la vida y, especialmente, del hombre;
- **teleología**: creencias acerca del significado y propósito del universo, sus elementos inanimados y sus habitantes;

- **teología**: creencias acerca de la existencia y naturaleza de Dios;
- **antropología**: creencias acerca de la naturaleza y propósito del hombre en general y de uno en particular;
- **axiología**: creencias acerca de la naturaleza de los valores, de lo que es bueno o malo, correcto o errado.

No vamos a analizar en detalle cada una de ellas ni sus implicaciones. Sin embargo, tenemos que recalcar que estas creencias afectan directamente el pensar y el actuar del individuo. Por otra parte, los elementos componentes de la cosmovisión están altamente interrelacionados y ciertas creencias pueden influir unas sobre las otras.

Debemos subrayar que, en muchas oportunidades, la cosmovisión de un individuo no es explícita y debe ser inferida a partir de su comportamiento y sus acciones. Sin embargo, no por ello deja de existir y de influir en su pensamiento y en su actuación, y aún en sus percepciones.

5.2. La cosmovisión del educador

Partiendo de la definición proporcionada por Funk, creemos que dicha noción, con sus respectivas adecuaciones, en especial al campo pedagógico, puede ser un buen instrumento de análisis. El “uno mismo” que nos va a interesar es aquel individuo que funge como un actor vinculado al mundo educativo. Podría tratarse del planificador, del legislador o del político que decide sobre el hecho educativo, como también del alumno o del docente. Pero, más específicamente, abordaremos el caso del docente.

Ahora pasamos a considerar algunos elementos que son clave como estructurantes de la cosmovisión del educador matemático.

Ya en el apartado anterior entablamos una discusión en torno a diferentes concepciones de la matemática. En dicha discusión aparecieron elementos vinculados con lo que Funk considera el nivel de *epistemología* y de *metafísica*. Afirmamos entonces que la visión (explícita o implícita) que un educador tenga de la matemática conforma necesariamente un elemento de trascendencia dentro de su cosmovisión.

Asimismo, al conocimiento matemático se le atribuye o asocia valores, vale decir que estamos ante la presencia de un componente *axiológico*. Sobre este último rubro, es clarificador lo que escribió Bertrand Russell en sus *Principles of social reconstruction*, en 1916. Decía lo siguiente:

> Aquellos que se dedican a la educación inculcan ciertos hábitos mentales: obediencia y disciplina, crueldad en la lucha por el éxito mundano, desprecio

> por los grupos opuestos y una indiscutida credulidad, una aceptación pasiva de la sabiduría del docente. Todos estos hábitos van contra la vida [...]. La satisfacción con el *statu quo* y la subordinación del alumno a las metas políticas, debido a la indiferencia respecto de las cosas de la mente, son las causas inmediatas de estos males; pero, por debajo de estas causas, hay una más fundamental, el hecho de que se encara la educación como medio para adquirir poder sobre el alumno, no como medio para nutrir el desarrollo de éste. (Citado en Rubinstein y Stoneman, 1976: 15)

Por otra parte, la visión que el educador posea con respecto a la educación y a la educación matemática en particular, ha de ser otro de los elementos a ser considerados. Por supuesto, este elemento no es independiente de la concepción que tenga el individuo sobre la matemática.

En lo que concierne a la educación podemos referirnos a la cultura del aula. En este sentido, Grouws señala que "cada clase de matemáticas asume su propia cultura de acuerdo con el conocimiento único, creencias y valores que los participantes traen al salón" (1996: 84). De acuerdo con esto, observamos que las interacciones que tienen lugar al interior del aula están ciertamente mediadas por las respectivas cosmovisiones de todos los actores del acto educativo.

Freire señala que "en todo el proceso de comprensión del mundo hay un proceso de producción y comprensión del conocimiento. En todo proceso de producción del conocimiento está implícita la posibilidad de comunicar lo que fue comprendido" (2006: 91). La dinámica de la cultura del aula tiene que ver con un proceso de producción y comprensión de conocimiento, y la comunicación de ese conocimiento se vuelve una necesidad. Como consecuencia de ello, dicha cultura está enmarcada por un complejo sistema comunicacional.

Michel Pêcheux, con base en la sociología marxista y la lingüística de Roman Jakobson, propone un modelo de comunicación en el cual desempeñan un papel central tanto las condiciones de producción del proceso comunicativo como también los efectos de sentido que se logran. En principio, viendo solamente las partes integrantes del modelo, pareciera que éste no tuviera nada de novedoso. Sin embargo, *lo importante del modelo radica en el uso e interpretación que realiza Pêcheux de las interrelaciones entre los actores del proceso y del inter-juego basado en las cosmovisiones de cada uno de ellos*.

Rodríguez Diéguez (1985) emplea este modelo para el análisis del acto didáctico. En la figura 11 puede verse los elementos constituyentes del modelo de Pêcheux (1995).

Figura 11

$$\overset{(L)}{A \xrightarrow[\textbf{R}]{\textbf{D}} B}$$

A	= Emisor
B	= Receptor
R	= Referente
(L)	= Código lingüístico (común a A y a B)
→	= Contacto establecido entre A y B
D	= Secuencia verbal enviada por A a B

De acuerdo con lo antes señalado, Pêcheux (1995) explicita en su modelo algunas relaciones entre los individuos participantes del acto comunicativo. Así, cada uno de ellos tiene una imagen de cada elemento que estructura el modelo, como se muestra a continuación:

$\mathbf{I_{(A)}B}$: la imagen que tiene A de B

$\mathbf{I_{(A)}A}$: la imagen que tiene A de A

$\mathbf{I_{(A)}R}$: la imagen que tiene A de R

$\mathbf{I_{(B)}B}$: la imagen que tiene B de B

$\mathbf{I_{(B)}A}$: la imagen que tiene B de A

$\mathbf{I_{(B)}R}$: la imagen que tiene B de R

A su vez, podemos considerar la imagen que tiene alguno de ellos, por ejemplo el emisor **A**, de cada una de las relaciones del otro (por ejemplo el receptor) consigo mismo, con el referente y con el emisor, esto es:

$\mathbf{I_{(A)}(\ I_{(B)}B)}$ la imagen que tiene A de la imagen que tiene B de B

$\mathbf{I_{(A)}(\ I_{(B)}R)}$ la imagen que tiene A de la imagen que tiene B de R

$\mathbf{I_{(A)}(\ I_{(B)}A)}$ la imagen que tiene A de la imagen que tiene B de A

Como los papeles de emisor y receptor se intercambian (o pueden intercambiarse) durante el acto comunicativo, tenemos entonces unas relaciones duales. Detrás de estas interacciones están hechos, pero también, en alto grado, creencias y percepciones, vale decir la cosmovisión de cada quien, que influye de manera determinante en la acción de cada uno de estos actores.

Si nos situamos en el ámbito del aula y pensamos por un momento que el emisor es el docente y el receptor el educando, tomando como referente el conocimiento matemático escolar, entonces podríamos interpretar, por ejemplo, $\mathbf{I_{(A)}R}$ e $\mathbf{I_{(B)}R}$ como las respectivas concepciones que tienen docente y alumno acerca del conocimiento matemático escolar. Mientras que $\mathbf{I_{(A)}(I_{(B)}R)}$ sería la percepción (creencia o supuesto) que el docente tiene acerca de la concepción que el estudiante tiene de dicho conocimiento.

Por último, pero no menos importante, como ingrediente de la cosmovisión del educador, debemos tomar en cuenta su percepción de la sociedad. Dentro de ésta tienen cabida los distintos elementos considerados por Funk; lógicamente, las creencias sobre el origen del universo y de la vida, del significado que ello pudiera tener, así como las creencias religiosas, de una u otra manera configuran la actuación pedagógica del docente. Asimismo, el cuerpo de valores aceptados por el individuo será otro determinante de su acción educativa. Todo ello va a conjuntarse con la apreciación que el docente tiene de lo que es aprendizaje, enseñanza, conocimiento, etc.

A la larga, asuntos trascendentes como equidad en el ámbito educativo, participación, democracia, ciudadanía y otros van a depender en gran medida de este inter-juego de cosmovisiones dentro de la cultura del aula.

Los aspectos considerados como partes integrantes de la cosmovisión del docente (concepción de la matemática, la educación y la sociedad), por supuesto no agotan el conjunto de elementos que la conforman. Aquí sólo se ha mencionado algunos que consideramos muy importantes, con el ánimo de mostrar las potencialidades de tomar la cosmovisión como un instrumento de análisis.

Hay que recordar, además, que el hecho educativo no se restringe al acontecer del aula y aspectos como el currículo y el proceso de transposición didáctica resultan mediados por la cosmovisión de quienes los llevan a cabo más allá del contexto escolar.

Cabe afirmar, finalmente, que la *weltanschauung* del docente, esa "lente" con que ve el mundo y lo interpreta, referida al ámbito de su campo de acción, se materializa en un modelo pedagógico específico.

6. El currículo escolar y los modelos pedagógicos

Desde el surgimiento de una institución diferenciada dentro de la sociedad, encargada del hecho educativo (la escuela), progresivamente ha ido estructurándose un cuerpo de conocimientos a ser enseñados, metodologías para la consecución de los fines de esta institución, libros especialmente realizados para su empleo en la enseñanza, y en fin, el *currículo*. Más aún, como señala Flórez Ochoa, se ha ido conformando toda una estructura para "reglamentar y normativizar el proceso educativo, definiendo ante todo qué se debería enseñar, a quiénes, con qué procedimientos, a qué horas, bajo qué reglamento disciplinario, para moldear ciertas cualidades y virtudes de los alumnos" (1996: 161); vale decir, diferentes *modelos pedagógicos* según la época y la sociedad de que se trate.

El cuadro 2 muestra parcialmente cómo era esa estructura en la Roma antigua.

Cuadro 2

Edad de los Alumnos	Clase o Grado	Título del Profesor	Programa
6/7 a 11/12	Ludus	Ludi Magister	Lectura, Escritura, Aritmética
12/13 a 16/18	De Gramática	Grammaticus	Gramática, Literatura
14/16 a 18/19	De Retórica	Rhetor	Gramática, Retórica, Dialéctica
21/25 a 40/45	Estudios Superiores Profesionales	Professor	Filosofía, Derecho, Medicina, Arquitectura, Matemáticas, Retórica

Fuente: Lozano (1990: 22).

Previamente hicimos mención al *Quadrivium*, el cual dio forma al currículo medieval.

En el cuadro 3 podemos ver de forma resumida la evolución del currículo escolar europeo, desde la Alta Edad Media hasta el siglo XVII.

Cuadro 3

<table>
<tr><th></th><th>Alta Edad Media</th><th>Baja Edad Media</th><th>Renacimiento</th><th>Siglos XVI y XVII</th></tr>
<tr><td rowspan="3">DRIVIUM</td><td>1. Gramática</td><td>Gramática</td><td>Gramática</td><td>Literatura
Gramática
Historia</td></tr>
<tr><td>2. Retórica</td><td>Retórica</td><td>Retórica</td><td>Retórica</td></tr>
<tr><td>3. Dialéctica</td><td>Dialéctica</td><td>Dialéctica</td><td>Lógica</td></tr>
<tr><td rowspan="2">QUADRIVIUM</td><td>4. Aritmética</td><td>Aritmética</td><td>Aritmética</td><td>Aritmética
Álgebra</td></tr>
<tr><td>5. Geometría</td><td>Geometría
Geografía</td><td>Geometría
Geografía</td><td>Geometría
Geografía
Trigonometría
Zoología
Botánica</td></tr>
</table>

	6. Astronomía	Astronomía Física	Astronomía Física	Astronomía Mecánica Física, Química
	7. Música	Música	Música	Música

Fuente: Lozano (1990: 42)

Collette afirma que:

> ... sirviéndose libremente de los trabajos de Euclides, Nicómaco y Tolomeo, [... los] primeros autores latinos, entre los que se puede mencionar a Boecio, Casiodoro, Isidoro de Sevilla, Beda el Venerable y Alcuino, ejercieron una gran influencia sobre la enseñanza de las matemáticas en las escuelas medievales hasta finales del siglo X [...]. El advenimiento de las universidades, a finales del siglo XII y en el curso del XIII, favorecerá, al menos en teoría, el desarrollo de las matemáticas y su difusión entre un mayor número de personas. Al principio, el programa de las universidades se basa esencialmente en las siete artes liberales, abandonando el *quadrivium* en gran parte en beneficio del *trivium*. (1986: 219 y 234)

Taton describe esta enseñanza así:

> Si bien la enseñanza de las Matemáticas constituyó siempre parte del *currículum* de la Facultad de Artes de las universidades medievales, su nivel no fue nunca muy elevado. [...] En los siglos XIV y XV, la enseñanza de las ciencias matemáticas y físicas se reducía a un poco de Aritmética (algorismo), algo de Geometría y un poco de Astronomía. A decir verdad, poco. (1972: 39)

Posteriormente, refiriéndose al período 1450-1580, Hofmann apunta que:

> ... el cálculo práctico es, en gran parte, asunto de la enseñanza de los profesores de cálculo en las escuelas municipales o comunales; naturalmente, se enseña también en colegios de latín. La enseñanza consta, en primer lugar, de una instrucción oral y desarrolla el estudio mecánico y memorístico. Los libros de cálculo impresos son generalmente colecciones de reglas, ejemplos y problemas. […] la tradición escolástica se mantiene más tiempo en España. (1960: 97-98)

El mismo autor señala:

> ... en el campo matemático se realiza la orientación hacia la Edad Moderna, sobre todo por la consideración de puntos de vista puramente prácticos. El interés histórico-científico ya no se concentra en el fraile docto o el profesor de universidad, sino en el maestro de cálculo, en una de las muchas ciudades del norte de Italia, del sur de Alemania y francesas, el cual se junta con sus colegas formando un gremio. (1960: 87)

Cabe destacar aquí que, con el paso del tiempo, se sucedió un proceso de migración de ciertos conocimientos, enseñados inicialmente en las universidades, hacia niveles inferiores de la escolaridad. Ello es explicable en virtud del desarrollo de las fuerzas productivas, lo cual hacía necesario que dichos conocimientos fuesen alcanzados a más temprana edad y por un número más elevado de personas.

Sobre este aspecto, Fehr y otros opinan que:

> ... fue natural que la organización tradicional de las matemáticas se convirtiese en el modelo adoptado en el plan de estudios de las matemáticas escolares. Lo primero que el adulto necesitaba saber eran los rudimentos del manejo de los números para contar y calcular, a los efectos de aplicarlos en sus negocios o en sus relaciones sociales. Durante los siglos XIV y XV estos conocimientos constituyeron el tema principal de las matemáticas que se enseñaban en las universidades europeas. Como consecuencia del aumento del caudal de saber que se iba incorporando a los estudios universitarios, la aritmética descendió de los escaños de la universidad a los de las escuelas secundarias, y finalmente tomó asiento al ras de los bancos de la escuela primaria. (1971: 5)

Sin embargo, habría que acotar que no sólo fue el "aumento del caudal de saber" lo que motivó esa migración del conocimiento universitario hacia el currículo de las matemáticas escolares, hubo también necesidades muy claras y manifiestas de la sociedad y de la evolución económica que forzaron a ello. Aún podríamos argüir que el mismo aumento de ese caudal de conocimientos también tiene estrecha relación con el desarrollo de las fuerzas productivas.

Bajo las premisas antes señaladas, es posible no sólo hacer la reconstrucción histórica del desarrollo del currículo escolar, particularmente en lo referido al conocimiento matemático, sino que además se puede establecer las causas y las motivaciones que le dieron origen, así como determinar las fuerzas sociales que lo motivaron y estructuraron.

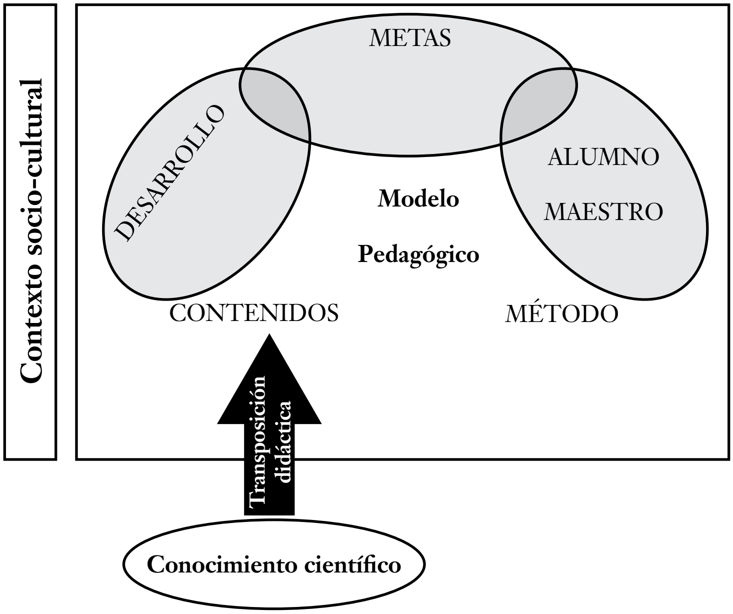
Para poder hacer este análisis, creemos que es de inmensa utilidad la noción de *modelo pedagógico* que emplea Flórez Ochoa, quien parte de cinco grandes interrogantes, a saber:

> a) *qué tipo de hombre* interesa formar; b) *cómo* o *con qué* estrategias técnico-metodológicas; c) a través de qué contenidos, entrenamientos o *experiencias*; d) *a qué ritmo* debe adelantarse el proceso de formación; y e) *quién predomina* o dirige el proceso, si el maestro o el alumno. (1996: 164)

En una línea de pensamiento similar a la que hemos venido siguiendo, Flórez Ochoa señala que las respuestas a los interrogantes anteriores "*varían* en cada obra pedagógica, asumen diferentes valores en la multiplicidad de contextos sociohistóricos y culturales" (Ibíd.).

En la figura 12 mostramos, con algunos agregados nuestros, el esquema básico de Flórez Ochoa.

Figura 12



Fuente: Elaboración propia, con base en el esquema de Flórez Ochoa (1996).

Partiendo de esta teorización, Flórez Ochoa establece cinco grandes modelos pedagógicos: el tradicional, el conductista, el romántico, el desarrollista y el socialista. Sobre estos modelos, hacemos notar que, en muchas oportunidades, no están en estado puro y es frecuente encontrar hibridaciones de ellos. Por otra parte, hay quienes agregan un sexto elemento: la evaluación asociada a cada uno de estos modelos.

Adicionalmente, es importante destacar, como lo hace el propio Flórez Ochoa, que los modelos no deben ser interpretados en ningún momento como estructuras rígidas o compartimientos estancos, sino como sistemas abiertos en permanente dinámica. Así mismo, se puede discrepar de las características que propone este autor para cada uno de los modelos por él descritos, o aún considerar otros modelos diferentes a los señalados, como han hecho otros investigadores. Ello no les resta relevancia.

El punto que hemos querido destacar aquí es la estructura analítica propuesta por el colega neogranadino, la cual es de innegable utilidad. En sus palabras, ellos evidencian un compromiso ideológico del hecho educativo y se convierten "en interesantes objetos de estudio sociohistórico y etnográfico [… y] constituyen herramientas conceptuales para entender mejor los fenómenos de la enseñanza" (Flórez Ochoa, 1996: 174).

En el cuadro 4 mostramos las características más importantes que definen a cada uno de los modelos descritos.

Cuadro 4

	Tradicional	Conductista	Romantico	Desarrollista	Socialista
Metas	Humanismo metafísico- religioso Formación del carácter	Moldeamiento de la conducta técnico- productiva	Máxima autenticidad, espontaneidad y libertad individual	Acceso al nivel superior de desarrollo intelectual, según las condiciones biosociales de cada uno	Desarrollo pleno del individuo para la producción socialista (material y cultural)
Desarrollo	De cualidades innatas (facultades y carácter) a través de la disciplina	Acumulación de aprendizajes Tecnología educativa Skinner	Natural, espontáneo y libre	Progresivo y secuencial a estructuras mentales cualitativa y jerárquicamente diferenciadas	Progresivo y secuencial pero impulsado por el aprendizaje de las ciencias
Contenidos	Disciplinas y autores clásicos resultados de la ciencia	Conocimientos técnicos: códigos, destrezas y competencias observables	Ninguna programación. Sólo lo que el alumno solicite	Experiencias que faciliten al acceso a estructuras superiores de desarrollo. El niño constituye sus propios contenidos de aprendizaje	Científico-técnicos, polifacético y politécnico
Métodos	Transmisionista Imitación del buen ejemplo Ejercicio y repetición	Fijación, refuerzo y control de los aprendizajes (objetivos "instruccionales") Transmisión parcelada de saberes	Suprimir obstáculos e interferencias que inhiban la libre expresión	Creación de ambientes y de experiencias de afianzamiento según cada etapa. El niño "investigador"	Variado según el nivel de desarrollo de cada uno y de acuerdo con el método de cada ciencia. Énfasis en el trabajo productivo
Relación maestro alumno	Relación vertical Maestro transmisior, dicta clases Alumno receptor	Maestro intermediario- ejecutor	Maestro es un auxiliar	Facilitador estimulador de experiencias	El maestro dirige el proceso

Fuente: Flórez Ochoa (1996).

7. Una mirada crítica a la transposición didáctica

Uno de los conceptos centrales dentro de algunas tendencias de investigación es el de *transposición didáctica*. Así por ejemplo, los seguidores de la didáctica fundamental y los que se adhieren al punto de vista de la socioepistemología lo emplean con frecuencia.

En cambio, otras corrientes de la educación matemática, como las socioculturales, en muchas ocasiones tienden a obviar la importancia de nociones como la transposición didáctica, las cuales, para ciertas tradiciones teóricas, están fundamentalmente motivadas más desde el interior mismo de las matemáticas que desde los contextos sociales que circunscriben el hecho educativo. Sin embargo, creemos que tal constructo es de gran utilidad, tiene un enorme potencial explicativo y puede ser reelaborado adecuadamente.

Evidentemente, la propuesta original de esta posición -ligada a una entidad metafísica como la Noosfera- produce cierto choque en quien piensa las matemáticas vinculándolas al contexto sociocultural. Sin embargo, es posible replantear dicha noción considerándola inmersa dentro de la evolución social de las culturas y de los pueblos.

No somos los únicos que rescatamos la noción de transposición didáctica para otros puntos de vista de la educación matemática.

Así por ejemplo, Díaz Arce señala que se puede:

> ... efectuar una doble lectura del concepto Transposición Didáctica acuñado por Chevallard (SIC) (1985) y partir de la cual es posible efectuar dos interpretaciones diametralmente opuestas. La primera de ellas cercana y fiel a los preceptos más bien positivistas del creador del concepto, y la segunda inserta en el enfoque socio-constructivista, el que a su vez abre una mirada distinta ante las consecuencias que acarrea situar la transposición didáctica en este enfoque epistemológico. (2003: 37)

Mientras que, por su parte, Cornejo (2006) apunta que:

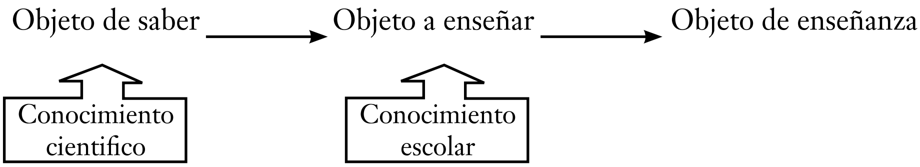
> La transposición didáctica de la ciencia académica al ámbito escolar, incluye variados aspectos tales como la selección social de los contenidos científicos que se enseñan en la escuela, el grado de actualización presentado por los mismos, la renovación metodológica y las innovaciones en la didáctica, así como las formas ideológicas y la relación del poder con los contenidos escolares.

Como puede apreciarse en la última cita, hay allí algunos agregados importantes con respecto al tratamiento que hace Chevallard (2000).

7.1. El punto de vista de Chevallard y algunas de sus interpretaciones

Para Chevallard, la transposición didáctica, en sentido restringido, designa "el paso del saber sabio al saber enseñado" (2000: 22). Es pues la conversión de un contenido del "saber sabio" en una versión didáctica de éste. En un sentido más amplio, es el paso de un objeto de saber a un objeto a enseñar y luego la conversión de este último en un objeto de enseñanza. La figura 13 representa este proceso.

Figura 13



Cantoral y Farfán señalan que:

> Se puede describir, en particular, un trabajo de transposición que lleva el saber "erudito" al saber a enseñar, consignado bajo la forma, por ejemplo, de capítulos de libros de texto escolar. Sin embargo, el trabajo de transposición no se detiene en la puerta de la clase sino que, por el contrario, marca todos los actos de enseñanza. Sin embargo, en este punto, él está condicionado de una manera crucial por los términos del *contrato didáctico*. (2004: 2)

La interpretación realizada por estos autores explica las "dos fases" mostradas en la figura 13. Le toca pues al docente jugar un importante papel en la segunda fase: el paso del "objeto a enseñar" al "objeto de enseñanza". Esta segunda fase puede asociarse con algunos de los niveles curriculares que presenta Gimeno Sacristán (1998), principalmente con el "currículo moldeado por los profesores".

Podemos afirmar ahora que es justamente aquí donde entra en acción de manera determinante *la cosmovisión del docente*. Aún más, hay que agregar que el primer paso de la transposición tampoco es inocente: se produce como parte de la definición de un modelo pedagógico que se estructura dentro del *marco de un contexto socio-cultural específico* (ver figura 12).

Gimeno Sacristán también hace notar rol del docente cuando señala que:

> ... adquieren un papel de primera importancia las concepciones de los profesores en la modelación de los contenidos y, en general, todas aquellas perspectivas profesionales que se liguen más directamente con las decisiones que el profesor toma cuando lleva a cabo una práctica. (1998: 216)

Otra acotación importante es la realizada por Cantoral y Farfán, quienes especifican:

> Los objetos destinados a enseñar no pueden en ningún caso analizarse como simplificaciones de objetos más complejos proporcionados por la sociedad científica. Por el contrario, son el resultado de ajustes didácticos, de una construcción, que les hace diferir cualitativamente de sus saberes de referencia. (2004: 3)

Esta puntualización es altamente importante, por cuanto marca una distinción neta entre lo que en otra parte de este artículo denominamos "conocimiento científico" y "conocimiento escolar", respectivamente.

Los colegas mexicanos amplían su posición, recalcando que:

> ... "el objeto de saber" se establece en el dominio del "saber erudito", es decir, aquel que es reconocido como tal por una comunidad científica, aunque no se enseña bajo esa forma. Mecanismos precisos deben asegurar su extracción del dominio "culto" y su inserción en un discurso didáctico. Una vez que se realiza este tratamiento, el saber didáctico es intrínsecamente diferente del saber erudito que le ha servido de referencia. Su ambiente epistemológico en particular es diferente, y así también la misma significación como la portadora de los conceptos que le estructuran. (Ibíd.)

Compartimos esta interpretación del resultado del proceso de transposición. Sin embargo, habría que explicar cómo se logra esto, quién(es) lo hace(n) y por qué se hace.

7.2. La transposición didáctica, el entorno social y la Noosfera

Aunque Chevallard afirme que "las relaciones entre el sistema de enseñanza y su entorno, entre la sociedad y su escuela, son ciertamente de una impresionante complejidad" (2000: 33), de lo que se deduce que él está consciente de la existencia de dichas relaciones, en la práctica termina obviándolas o, en el mejor de los casos, dejándolas en segundo plano, tal vez por esa misma complejidad que él manifiesta.

Como consecuencia de lo anterior, termina teniendo una visión del proceso de transposición didáctica que está, por una parte, muy circunscrita a lo que acontece al interior del saber sabio (la matemática académica, en nuestro caso), lo cual se evidencia cuando afirma que "puede incluso que cierta cuestión, que ocupaba un lugar importante en los programas, bruscamente se considere de interés a la luz de nuevos desarrollos o cambios en las problemáticas del campo científico considerado" (: 31).

Por otra parte, este autor le da la preeminencia a una entidad que denomina la *Noosfera*, que según él "es el centro operacional del proceso de transposición" (: 34) y que además opta prioritariamente por un reequilibrio *por medio de la manipulación del saber*. Es ésta, pues, la que va a proceder a la selección de los elementos del saber sabio que, designados como 'saber a enseñar', serán sometidos al trabajo de transposición (: 36).

Pero, ¿qué es esta Noosfera?, ¿quién(es) la integra(n)?, ¿qué motiva su actividad?, ¿cómo opera?

Chevallard parte del sistema didáctico, conformado por tres elementos: un docente, los alumnos y un saber matemático (el saber enseñado) y además entran en juego las interrelaciones entre ellos. Este sistema es considerado abierto y en relación con un ámbito exterior. El autor especifica que:

> El entorno inmediato de un sistema didáctico está constituido inicialmente por el *sistema de enseñanza*, que reúne el conjunto de sistemas didácticos y tiene a su lado un conjunto diversificado de dispositivos estructurales que permiten el funcionamiento didáctico y que intervienen en él en diversos niveles. (: 27)

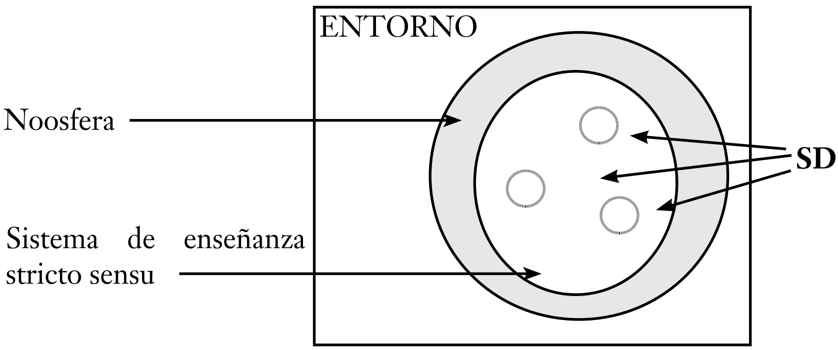
Y a continuación indica:

> El sistema de enseñanza […] posee a su vez un entorno, que podemos denominar, si lo deseamos, la *sociedad*, la sociedad "laica", por contraste con esa sociedad de expertos que es el sistema de enseñanza/educativo. Ese entorno se caracteriza por una estructuración en extremo compleja. (Ibíd.)

En este entorno sitúa a los padres, a los matemáticos y a las instancias gubernamentales encargadas de lo educativo (como el respectivo Ministerio). Chevallard reconoce lo incompleto de su formulación, amén de la complejidad que envuelve el asunto. A raíz de ello, decide agregar a su esquema una instancia mediadora entre el sistema de enseñanza y el entorno social más general. Esta entidad mediadora es justamente la *Noosfera*. Es éste un término de origen metafísico, acuñado inicialmente por el ruso Vladimir Ivanovich Vernadsky y empleado posteriormente por el teólogo cristiano Pierre Teilhard de Chardin.

La figura 14 recoge el esquema planteado por Chevallard.

Figura 14



Fuente: Chevallard (2000)

El autor le adjudica a esta instancia intermediaria el enfrentarse y solucionar los conflictos que surgen entre el sistema didáctico y su entorno (la sociedad en general). Los agentes de esta actividad mediadora son “todos aquellos que, en tanto ocupan los puestos principales del funcionamiento didáctico, se enfrentan con los problemas que surgen del encuentro de la sociedad y sus exigencias” (: 28). Seguidamente incluye allí desde el docente hasta sus asociaciones, desde los padres de los alumnos, pasando por los didactas, hasta incluso los factores políticos.

Para nosotros resulta totalmente ambiguo ese “todos aquellos” y la lista anterior, en lugar de aclarar, sólo sirve para afianzar ese carácter etéreo de la Noosfera, el cual queda más remarcado aún cuando se la caracteriza como “la esfera *donde se piensa* el funcionamiento didáctico”. Siguen pues sin respuesta las interrogantes que formuláramos más arriba. El *qué es* y el *quiénes la integran* han quedado en un limbo difuso e insalvable.

Para Chevallard, el proceso de transposición se activa en virtud de que “la distancia correcta que el saber enseñado debe guardar respecto del saber sabio y también respecto del saber banalizado resulta poco a poco erosionada” (: 30).

Podemos reconocer éste como uno de los factores involucrados, baste recordar la afirmación del eminente matemático Jean-Pierre Kahane, quien señaló que “en ninguna otra ciencia, como en las matemáticas, la distancia entre lo nuevo y lo que se enseña es tan grande”, pero ni es el único factor ni tampoco necesariamente el más importante.

La investigación histórica de la matemática (Struik, 1960, 1967) y la evolución de las matemáticas escolares muestran un panorama bastante distinto. Si se hace un seguimiento de cómo diversos contenidos, como los relacionados con la aritmética comercial, los decimales, el sistema métrico decimal, los logaritmos y la matemática moderna, fueron progresivamente formando parte de las matemáticas escolares, se puede encontrar causas muy marcadas, provenientes del entorno social, que motorizaron dicho proceso.

En el caso de la matemática moderna, es evidente el hecho de que el lanzamiento del Sputnik, la guerra fría y otros factores promovieron la reforma en los años 60.

Sorando Muzás lo expresa claramente en su obra *Origen del movimiento de la matemática moderna* (2002):

> El lanzamiento en 1957 del primer Sputnik por la URSS propició en EE.UU. la alarma sobre la inferioridad nacional en los campos científico y tecnológico. En esa coyuntura, al constatar el bajo nivel norteamericano en educación matemática, surgió la idea, secundada en los ámbitos políticos y económicos, de que era necesaria una reforma.

7.3. Otras interpretaciones

Diferentes investigadores, en contextos diversos y con cosmovisiones distintas, dan disímiles interpretaciones a la transposición didáctica, así como a la forma de funcionamiento de dicho proceso, sus causas y motivaciones. Veamos algunos elementos de éstas.

Rogers plantea algo bastante diferente a lo indicado por Chevallard:

> El estudio de lo que es transmitido y cómo se transmite se ve en las necesidades percibidas, motivos, contextos social y económico, preferencias y prioridades del período particular. Pero no solamente esto, yo afirmo que hay conjuntos de creencias epistemológicas subyacentes que guían la clase de prácticas de transmisión que podemos ser capaces de descubrir mirando los textos mismos. (2002)

Sobre este mismo aspecto se expresan Sierpinska y Lerman, quienes coinciden en lo esencial con lo señalado por Rogers:

> En cuanto a los contenidos curriculares, éstos han sido tan toscos como el de la escolarización general de la Inglaterra del siglo diecinueve, en el que a los chicos se les enseñaba la suficiente aritmética para capacitarles para que desempeñaran su papel de trabajadores en la sociedad industrial y no lo suficiente como para que pudieran desafiar a esa sociedad. A las chicas se les enseñaba sólo la aritmética requerida para capacitarles a gestionar la economía de sus familias. (Sierpinska y Lerman, 1996: 10)

Las citas anteriores remiten a causas y motivaciones sociales la estructuración del currículo y la selección de los contenidos a ser enseñados en la escuela.

Clements, por su parte, afirma:

> Los historiadores de la educación y los expertos en educación comparada saben que en todo el mundo los currículos de matemáticas para la enseñanza secundaria, y parte de los de primaria, se formularon en el siglo XIX, en un tiempo en que los alumnos de clase media eran los únicos que asistían a la escuela secundaria. En aquella época, eran los matemáticos universitarios, a veces de acuerdo con los líderes de la burocracia educativa y los políticos, quienes definían las matemáticas escolares. (2000: 73)

Hay aquí una identificación expresa de los actores involucrados en el proceso de transposición. Además, en los tiempos que corren, esos mismos actores siguen teniendo gran parte del peso del proceso de transposición, especialmente los últimos. Habría que sumar a los docentes de aula y a los autores de obras didácticas, conjuntados éstos con la empresa editorial, cuyos mecanismos comerciales en ocasiones imponen aspectos curriculares.

Bishop, partiendo de la premisa de que la educación (en particular la matemática) es un hecho social, distingue cinco niveles diferenciados en los cuales esta educación tiene lugar, a saber: cultural, societal (que él refiere a aspectos sociales de un grupo en particular), institucional, pedagógico e individual. Este estudioso expone claramente que en el nivel más general, el cultural, las matemáticas:

> ... tienen una naturaleza claramente suprasocial. Las matemáticas se utilizan en todas las sociedades. […] En el nivel *societal*, las matemáticas están mediatizadas por las diversas instituciones de la sociedad y están sometidas a las fuerzas políticas e ideológicas de esa sociedad. (1999: 32)

Como consecuencia de lo anterior, puede observarse que las sociedades “emplean sus distintas instituciones educativas formales e informales para dar forma a la enseñanza de las matemáticas en función de sus aspiraciones y sus metas sociales” (Ibíd.).

Vimos anteriormente que estas aspiraciones y metas de una sociedad dada son uno de los elementos estructurantes de un modelo pedagógico. En ninguno de los planteamientos anteriores constatamos la necesidad de acudir a entidades metafísicas para poder explicar el proceso de transposición, ni tampoco de acudir sólo al desfase entre el conocimiento académico y el escolar como causa motora del proceso. Este proceso es perfectamente explicable utilizando otros elementos de análisis.

8. Encajando las piezas del rompecabezas y abriendo nuevos caminos

A lo largo de la exposición precedente, hemos ido tratando de concatenar lo más posible los diferentes asuntos tratados. Razones de espacio nos impiden entrar en mayores detalles sobre algunos de los aspectos considerados, ni analizar implicaciones importantes como las referidas al problema de la equidad en educación y cómo la enseñanza de las matemáticas puede convertirse en un mecanismo de selección social y de ejercicio del poder.

No obstante, en este último apartado realizaremos algunos comentarios finales para ahondar en los nexos que queremos resaltar entre los diversos elementos discutidos.

Gran parte de nuestro discurso ha estado dedicado a demostrar las relaciones vivas, dinámicas y objetivas ente el conocimiento matemático y el desarrollo de las sociedades. Este conocimiento ha sido considerado tanto en sus diferentes niveles de evolución, los cuales marchan acordes con el nivel de sofisticación alcanzado por la cultura dentro de la cual ese conocimiento se origina o se adopta y/o adapta de otros pueblos, como en relación con tres tipos bien diferenciados según su ámbito de acción sea el escolar, la comunidad científica o el más general de la sociedad en su vida cotidiana.

Así mismo, hemos hecho un llamado de atención hacia el hecho de que este vínculo entre el conocimiento matemático en todas sus vertientes y el quehacer socio-cultural de los pueblos no debe llevarnos a la realización de apreciaciones cargadas de subjetivismo y de un relativismo cultural exacerbado, las cuales sólo conducen a afirmaciones y "teorías" totalmente especulativas, de tinte idealista y sin objetividad ni validez científica.

Como contrapartida, proponemos recurrir a la concepción materialista de la historia, al método dialéctico que permite encajar de manera coherente y lógica, además de explicar, el desarrollo en el tiempo del conocimiento matemático y así crear una base teórico-metodológica que haga posible una investigación de corte científico, objetiva, dentro del campo de la educación matemática.

En función de lo anterior fue que discutimos algunas de las corrientes filosóficas y concepciones de la matemática que en el transcurso del tiempo han ido marcando las visiones que de las ciencias exactas se ha tenido, mismas que han penetrado en buena parte la educación matemática.

Estas concepciones, en conjunto con otros elementos resaltantes, conforman lo que aquí hemos denominado la *cosmovisión del docente*. Esta cosmovisión es determinante en la actividad del maestro o profesor, al momento de intervenir en el proceso de transposición didáctica y de su acción docente dentro del sistema didáctico.

Por otro parte, en cada sociedad la educación juega un rol específico, creándose a partir de cierto momento instituciones *ex profeso* para tal fin. Aparece entonces un modelo pedagógico particular que entre sus componentes tiene unos contenidos determinados a ser enseñados, los cuales son consecuencia de un proceso de transposición desde otros saberes (especialmente a partir del saber científico). Este proceso de transposición no es una mera simplificación, sino una transformación radical de estos saberes y puede ser estudiado en todas sus facetas dentro de la concepción investigativa que aquí se propone.

A todo lo antes señalado, tendríamos que agregar aún algunas especificidades de los países de lo que se llegó a denominar "Tercer Mundo". En algunos de estos países, como ha sido el caso de Venezuela, en diferentes momentos históricos, buena parte del proceso de transposición didáctica no fue autóctono y se produjo como efecto de una transculturización impuesta por la circunstancia de ser un país periférico, fundamentalmente en el ámbito de producción científico-tecnológica. Caso emblemático de esto fue la reforma que condujo a la introducción de la matemática moderna, hecho que estuvo mediado por las Conferencias Interamericanas de Educación Matemática y que llegó a tierras americanas vía Estados Unidos, en un paquete integrado que contenía también las concepciones del conductismo de Skinner.

Beyer (2009) hizo un estudio sistemático de la evolución de la educación matemática en Venezuela durante un período bastante prolongado, y pudo constatar cómo ese proceso transculturizador es una pauta constante a través del tiempo.

Es lo que Bonfil-Batalla (1991) llama "cultura impuesta", la cual se produce cuando se adoptan elementos culturales ajenos y las decisiones para su adopción son esencialmente ajenas:

> ... la naturaleza de la sociedad capitalista, acentuada por la industrialización, implica un proceso creciente de enajenación e imposición cultural sobre el mundo subalterno, al que se quiere ver convertido en un consumidor de cultura y no en creador de ella. (Ibíd.)

En conclusión, debemos abrir pues las puertas a nuevos caminos, a "nuevos" rumbos de investigación. Escribimos el término nuevos entre comillas ya que muchos de los elementos aquí propuestos no lo son para nada y ya han sido aplicados con bastante éxito.

El único mérito al que aspiramos es el de haber juntado las piezas de un rompecabezas, piezas que insignes pensadores ya habían mostrado a través de sus brillantes reflexiones e investigaciones, como puede apreciarse en la extensa bibliografía y en la profusión de citas en que nos hemos apoyado.

Los caminos hay que abrirlos, insistimos, para enfocar la investigación en educación matemática con directrices diferenciadas que apoyen la transformación y el progreso de nuestros pueblos latinoamericanos.

Creemos que ya basta de repetir la frase del Maestro Simón Rodríguez: "¡O inventamos o erramos!". Ésta debe dejar de ser un *slogan* y un mero decir, ha de convertirse en luz que ilumine nuestro andar, en guía y estímulo para la acción.

Bibliografía

Ander-Egg, E. (1994). *Interdisciplinariedad en educación*. Barcelona: Grijalbo-Mondadori.

Barrow, John D. (1997). *¿Por qué el mundo es matemático?* Barcelona: Grijalbo-Mondadori.

Aristóteles. (1977). *Obras*. Madrid: Aguilar.

Bernays, P. (1982). *El platonismo en matemáticas*. Caracas: Ediciones de la Biblioteca de la universidad Central de Venezuela.

Beyer K., y Walter O. (2005). "Matemáticas, desarrollo humano, cultura y naturaleza". En: Mora, D. (coord.) (2005). *Didáctica crítica, educación crítica de las matemáticas y etnomatemática*. La Paz: Editorial "Campo Iris".

Beyer K., y Walter O. (2009). *Estudio evolutivo de la enseñanza de las matemáticas elementales en Venezuela a través de los textos escolares: 1826-1969*. Tesis Doctoral no publicada. Caracas: universidad Central de Venezuela.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática. La educación matemática desde una perspectiva cultural*. España: Paidós.

Bonfil Batalla, G. (1991). "Lo propio y lo ajeno. Una aproximación al problema del control cultural". En: Bonfil Batalla, G. (1991). *Pensar nuestra cultura*, *ensayos*. Madrid: Alianza Editorial. Disponible en: http://www.culturatradicional.org/zarina/Articulos/lopropio.htm [Consultado el 5 de agosto de 2010].

Bosch, J. (1971). *Qué es la matemática*. Buenos Aires: Editorial Columbia.

Bourbaki, N. (1948). "La arquitectura de las matemáticas". En: Le Lionnais, F. y otros (1976). *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Campiglio, A. y Eugeni, V. (1992). *De los dedos a la calculadora. La evolución del sistema de cálculo*. Barcelona: Paidós.

Cantoral, R. y Farfán, R. M. (2004). *Desarrollo conceptual del cálculo*. México: Thompson.

Chapelon, J. (1948). "Las matemáticas y el desarrollo social". En: Le Lionnais, F. y otros. (1976). *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Chela, R. (1986). *Matemática y lógica*. Caracas: Fondo Editorial Acta Científica Venezolana.

Chevallard, Y. (2000). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique Grupo Editor.

Chervel, A. (1991). Historia de las disciplinas escolares. Reflexiones sobre un campo de investigación. *Revista de Educación*. México: Siglo XXI.

Clements, K. (2000). "Matemáticas en la escuela: cuestiones de equidad y justicia". En: Grigorió, N., Deulofeu, J. y Bishop, A. (coords.) (2000). *Matemáticas y educación. Retos y cambios desde una perspectiva internacional.* Barcelona: ICE de la Universitat de Barcelona y Editorial Graó.

Collette, Jean-Paul. (1986). *Historia de las Matemáticas. Volumen I.* México: Siglo XXI.

Conferencia Mundial sobre las Políticas Culturales. (1982). Declaración de México sobre las Políticas Culturales. Disponible en: http://www.foromexicanodelacultura.org/files/7c6c2286b8b8a52b40c641590225c011mexico_sp.pdf [Consultado el 25 de julio de 2010].

Cornejo, J. N. (2006). El análisis de manuales escolares y la historia de la enseñanza de la ciencia como recurso en la formación docente. *Revista Iberoamericana de Educación*. Nº 38/6. Disponible en: http://www.rieoei.org/experiencias122.htm [Consultado el 23 de abril de 2009].

D'Ambrosio, U. (2009). *Matemática acadêmica e matemática escolar: as mesmas ou diferentes?* Conferencia Central. VI Congreso Iberoamericano de Educación Matemática. Puerto Montt, Chile.

Díaz Arce, T. (2003). La interpretación histórico-cultural de la transposición didáctica como puente de emancipación del aprendizaje y la enseñanza. *Revista Praxis*. Nº 3. Disponible en: http://www.revistapraxis.cl/ediciones/numero3/diaz_praxis_3.htm [Consultado el 30 de septiembre de 2007].

Díez Palomar, F. J. (2004). *La enseñanza de las matemáticas en la educación de personas adultas. Un modelo dialógico*. Tesis Doctoral no publicada. Barcelona: universidad de Barcelona.

Dowling, P. (1996). A sociological analysis of school mathematics texts. *Educational Studies in Mathematics*. Nº 31.

Escoto Eriúgena, J. (1984). *División de la naturaleza*. Barcelona: Orbis.

Fayerabend, P. (1984). *Contra el método. Esquema de una teoría anarquista del conocimiento*. España: Editorial Orbis.

Fehr, H. y otros (1971). *La revolución en las matemáticas escolares (Segunda Fase) (Monografía N° 13)*. Washington: OEA.

Flórez Ochoa, R. (1996). *Hacia una pedagogía del conocimiento*. Bogotá: McGraw-Hill.

Freire, P. (2006). *Pedagogía de la tolerancia*. México: Fondo de Cultura Económica.

Frischeisen-Köhler, M. y Dilthey, W. (2009). *Weltanschauung*. Charleston: Bibliolife.

Funk, K. (2001). *What is a Worldview?* Disponible en: http://web.engr.oregonstate.edu/~funkk/Personal/worldview.html [Consultado el 30 de julio de 2010].

García Bacca, J. D. (1961). *Textos clásicos para la historia de las ciencias*. Caracas: universidad Central de Venezuela.

García Borón, J. C. (1987). *La filosofía y las ciencias. Métodos y procederes*. Barcelona: Editorial Crítica.

Gimeno Sacristán, J. (1998). *El currículum: una reflexión sobre la práctica*. Madrid: Ediciones Morata.

Godínez Cabrera, H. F. (1997). Una relación breve y sumaria sobre el origen y evolución del significado de la palabra Matemática. *Educación Matemática*. Nº 9 (3).

Grouws, D. (1996). "Critical issues in problem solving instructions in mathematics". En: Zhang, D., Sawada, T. y Becker, J. P. (eds.). *Proceedings of the China-Japan-U.S. Seminar on Mathematical Education*. Board of Trustees of Southern Illinois University.

Guétmanova, A. (1989). *Lógica*. Moscú: Editorial Progreso.

Haith, M., Vasta, R. y Miller, S. (2008). *Psicología infantil*. Barcelona: Editorial Ariel.

Haussman, B. (1968). *Problemas filosóficos de la matemática*. Buenos Aires: Editorial Columba.

Hofmann, J. (1960). *Historia de la Matemática. Tomo I*. México: UTEHA.

Ifrah, G. (1997). *Historia universal de las cifras: La inteligencia de la humanidad contada por los números y el cálculo*. Madrid: Espasa Calpe.

Joseph, G. G. (1996). *La cresta del pavo real: Las matemáticas y sus raíces no europeas*. Madrid: Ediciones Pirámide.

Kedrov, M. B. y Spirkin, A. (1968). *La ciencia*. México: Editorial Grijalbo.

Kline, M. (1976). *El fracaso de la Matemática Moderna*. Madrid: Siglo XXI.

Kline, M. (1985). *La pérdida de la certidumbre*. Madrid: Siglo XXI.

Kolmogorov, A. N. (1936). "Matemáticas". En: *Enciclopedia Soviética (Traducción de Benito Fernández y Enrique Pastor)*. Disponible en: http://divulgamat.ehu.es/weborriak/historia/Gaceta/historia91b.pdf [Consultado en julio de 2009].

Labérenne, P. (1948). "Las matemáticas y el marxismo". En: Le Lionnais, F. y otros. (1976). *Las grandes corrientes del pensamiento matemático*. Buenos Aires: Editorial Universitaria de Buenos Aires.

Lakatos, I. (1987). *Matemáticas, ciencia y epistemología*. Madrid: Alianza Editorial.

Lozano, C. (1990). *La escolarización. Historia de la enseñanza*. Barcelona: Montesinos Editor.

Lundgren, U. (1997). *Teoría del currículum y escolarización*. Madrid: Ediciones Morata.

Martínez Miguélez, M. (2003). Sobre el Estatuto Epistemológico de la Psicología. *Polis. Revista On-line de la universidad Bolivariana de Chile*. Nº 1 (4). Disponible en: http://www.revistapolis.cl/4/mar.pdf [Consultado el 29 de julio de 2010].

Marx, K. (1859). “Prólogo de la Contribución a la Crítica de la Economía Política”. En: Marx, K. y Engels, F. (s/f). *Obras Escogidas. Tomo I.* Moscú: Editorial Progreso.

Marx, K. y Engels, F. (1971). *La ideología alemana*. Montevideo: Ediciones Pueblos Unidos.

Morín, L. *Los charlatanes de la nueva pedagogía. Perplejidades de un joven profesor*. Barcelona: Editorial Herder.

Mosterín, J. (1981). *Grandes temas de la Filosofía actual. Colección Temas Clave, Nº 56*. España: Salvat Editores.

Mtetwa, D. (1992). “Matemática y etnomatemática: Punto de vista de los estudiantes de Zimbabwe. Boletín ISGEM, Vol. 7, Nº 1”. En: Scott, P. (1995). *Un compendio de los Boletines del Grupo Internacional de Estudios de Etnomatemáticas. Agosto 1985 a diciembre 1994*. (CBI).

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (1986). *An agenda for action. Recommendations for School Mathematics of the 1980's*. USA: NCTM.

Newman, J. R. (1976). “Comentario: Hermann Weyl”. En: Newman, J. R. (comp.). *SIGMA: El mundo de la matemática*, *Tomo 5*. Barcelona: Grijalbo.

Pacioli, L. (1991). *La divina proporción*. Madrid: Ediciones Akal.

Padrón Guillén, J. (1997). *Tres críticas a las doctrinas del paradigma emergente*. Caracas: Centro de Investigaciones en Educación y Ciencias Humanas, Decanato de Postgrado, universidad Simón Rodríguez.

Pêcheux, M. (1995). “Automatic discourse analysis”. En: Hak T., y Helsloot, N. (eds.) (1995). *Automatic discourse analysis*. Amsterdam/Atlanta: Rodopi Editions B.V.

Qualding, D. A. (1982). La importancia de las matemáticas en la enseñanza. *Perspectivas*. Nº 12 (4).

Quine, W. (1984). *Desde un punto de vista lógico*. Barcelona: Ediciones Orbis.

Rico, L. (1997). “Dimensiones y componentes de la noción de currículo”. En: Rico, L. (ed.) (1997). *Bases teóricas del currículo de matemáticas en educación secundaria*. Madrid: Editorial Síntesis.

Rodríguez Diéguez, J. L. (1985). *Currículum, acto didáctico y teoría del texto*. Madrid: Ediciones Anaya.

Rogers, L. (2002). *Pedagogical traditions in mathematics teaching: English arithmetic books from 1780 to 1850*. Disponible en: http://correio.cc.fc.ul.pt/~jflm/mes2/rogers.doc. [Consultado el 15 de agosto de 2007].

Rubinstein, D. y Stoneman, C. (comps.) (1976). *Educación para la democracia*. Caracas: Monte Ávila Editores.

Ruiz Zúñiga, Á. (1991). "Matemáticas y cultura en La Decadencia de Occidente de Spengler". En: Ruiz Zúñiga, Á. (ed.). *Ciencia y tecnología. Cuadernos del pasado y el futuro*. Costa Rica: Asociación Costarricense de Historia y Filosofía de la Ciencia. Disponible en: http://cimm.ucr.ac.cr/aruiz/libros/CienciayTecnologia/HistoriayFilosofiadelasMatematicas/AngelRuiz.html [Consultado el 28 de julio de 2010].

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). "Epistemologies of mathematics and of mathematics education". En: Bishop, A. et al. (eds.) (1996). *International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. Traducción al español disponible en: http://www.ugr.es/~jgodino/semioesp/Confrontacion.PDF [Consultado el 28 de noviembre de 2001].

Skovsmose, O. (1994). *Towards a philosophy of critical mathematics education*. Holanda: Kluwer Academic Publishers.

Sokal, A. y Bricmont, J. (1999). *Imposturas intelectuales*. Barcelona: Paidós.

Sorando Muzás, J. M. (2002). Reseña del libro El fracaso de la matemática moderna. *DivulgaMAT*. (Reseña aparecida en la Revista SUMA Nº 39). Disponible en: http://divulgamat.ehu.es/weborriak/publicacionesdiv/libros/LiburuakDet.asp?Id=121 [Consultado: 1 de agosto de 2010].

Spengler, O. (1976). "El significado de los números". En: Newman, J. (1976) (comp.). *SIGMA. El mundo de las matemáticas, Vol. 6*. México: Ediciones Grijalbo.

Struik, D. (1960). *La matemática. Sus orígenes y su desarrollo*. Buenos Aires: Ediciones Siglo Veinte.

Struik, D. (1967). *A concise history of mathematics*. New York: Dover Publications.

Taton, R. (Dir.) (1972). *Historia general de las ciencias. Volumen 2. La ciencia moderna (de 1450 a 1800)*. Barcelona: Ediciones Destino.

Tse-Tung, M. (1967). *Sobre la contradicción*. Pekín: Ediciones en Lenguas Extranjeras.

Underwood, D. (1993). *Resources for calculus. Vol. 5. Readings for calculus, MAA Notes. Vol. 31*. USA: MAA.

Vives, J. L. (1985). *Las disciplinas*. Vol. I. Barcelona: Ediciones Orbis.

White, L. (1976). "El lugar de la realidad matemática: una referencia antropológica". En: Newman, J. (1976) (comp.). *SIGMA. El mundo de las matemáticas*. Vol. 6**.** México: Ediciones Grijalbo.